

Б.Г. Зив

ГЕОМЕТРИЯ

ДИДАКТИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ



для

11

КЛАССА

10-е издание

Москва
"Просвещение"
2009

УДК 372.8:514
ББК 74.262.21
3.59

Зив Б. Г.

**3.59 Геометрия : дидактические материалы для 11 кл.
Б. Г. Зив. — 10-е изд. — М. : Просвещение, 2008.
128 с. : ил. — ISBN 978-5-09-015960-9.**

Данное пособие содержит самостоятельные и контрольные работы по геометрии, а также дополнительные задания. Пособие можно использовать преподавателем, работая по учебнику «Геометрия. 10–11 класс» авторов Н. С. Атанасова, В. Ф. Бутузова, С. Б. Кадомцева, Л. С. Киселёвой, Ю. Г. Позина, а также самостоятельно при работе по учебнику геометрии.

ISBN 978-5-09-015960-9

Издательство «Просвещение», 1994.
Художественное оформление.
Издательство «Просвещение», 2000.
Издательство «Просвещение», 2008,
с изменениями.
Воспринимать целиком.

ПРЕДИСЛОВИЕ

В пособии приведены 19 самостоятельных работ, одна дополнительная самостоятельная работа, 1 работа на повторение, 3 математических диктанта и 1 контрольное задание. Самостоятельные работы обозначены буквой С с соответствующим номером, дополнительные самостоятельные работы — буквой ДС, математические диктанты — буквой МД, а контрольные работы — буквой К.

Основная цель самостоятельных работ — помочь учителю организовать деятельность учащихся по решению задач с учетом их индивидуальных особенностей и уровня подготовки. Кроме того, самостоятельные работы могут применяться для текущего контроля знаний и навыков учащихся.

Самостоятельные работы даны в восьми вариантах. В первом и втором вариантах каждой работы предложены задания, для успешного решения которых учащиеся должны применить знания на уровне минимальных требований.

Третий и четвертый варианты состоят из задач среднего уровня сложности. Решение этих задач предполагает умение распознавать понятия в стандартных ситуациях, применение знаний в стандартных условиях или при не больших отклонениях от них. Задачи третьего и четвертого вариантов по сложности примерно соответствуют заданиям учебника.

Пятый и шестой варианты предназначены для наиболее подготовленных учащихся. При решении задач этих вариантов требуется умение применять знания в нестандартных ситуациях, иметь достаточно высокие уровень развития вычислительных навыков и навыков применения тождественных преобразований. По сложности эти задачи примерно соответствуют наиболее трудным из основных и дополнительных задач учебника.

Седьмой и восьмой варианты состоят из задач, при решении которых требуется творческое применение знаний. Здесь приходится анализировать сложные геометрические ситуации, самостоятельно открывать новые факты, устанавливать отношения между ними. Задачи из седьмого и восьмого вариантов могут быть даны отдельным учащимся после выполнения ими основной работы, учащимся во время окончания класса и оставшегося времени или использоваться в качестве дополнительных заданий для домашней работы, а также во факультативных занятиях либо занятиях математического кружка. Учитель не следует обязательно

выполнять с учащимися все задания каждой из работ. Надеемся, что представленные в пособии работы позволят учителю на любом уроке отобрать необходимые задания в зависимости от цели урока, наличия учебного времени, уровня подготовки учащихся.

Работы на повторение составлены в четырех вариантах примерно одинаковой степени сложности. Они позволяют учителю комплексно повторить темы 10–11 классов. Каждая работа состоит из нескольких небольших задач или вопросов различной степени сложности. Это дает возможность каждому ученику проверить свои силы по отдельным вопросам курса геометрии и лучше подготовиться к выпускному экзамену.

Математические диктанты предназначены для систематизации теоретических знаний учащихся и могут представлять контрольную работу. Диктант составлен из небольших задач по прямому применению теории. При проведении диктанта ученик должен в течение нескольких минут ответить на вопрос или решить задачу, предложенную учителем. Необходимое для ответа время регулирует учитель в зависимости от сложности вопроса и подготовленности класса. На такую работу можно отвести 30–35 мин, после чего учитель вместе с классом проверит ответы учащихся, анализирует допущенные ошибки. Он сам решит, какие задачи дать в виде текста, а какие — с использованием чертежа. Учитель также по своему усмотрению может предлагать не все вопросы диктанта, а только их часть. Задания математических диктантов могут быть использованы как набор дополнительных вопросов на экзамене по геометрии.

Контрольные работы составлены в четырех вариантах. Они предназначены для проведения итоговых проверок знаний по каждой из трех тем учебника и по всему курсу геометрии. Сложность всех вариантов работ примерно одинакова. В каждом варианте имеются более сложные задачи, отмеченные знаком *. Оценка выставляется ученикам только за основную часть работы, а ученики, решившие дополнительную задачу, могут получить вторую оценку за работу.

В конце пособия даны ответы ко всем самостоятельным работам, работам на повторение и к контрольным работам. К наиболее сложным заданиям приведены указания или решения. Предложенные решения, разумеется, не являются единственно возможными.

Автор

Вариант 1

С-1

- Куб $ABCD A'B'C'D'$ помещен в прямоугольную систему координат (рис. 1), $A(2; -2; 0)$.
1) Найдите координаты всех остальных вершин куба.
2) Найдите координаты векторов $\vec{OD}$, $\vec{OC'}$, $\vec{OM}$ и разложите их по векторам $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$.
- Даны векторы $\vec{a}(2; -1; 3)$, $\vec{b}(3; 2; 1)$ и $\vec{c}(10; 6; -4)$. Будут ли коллинеарными векторы $\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{c}$?

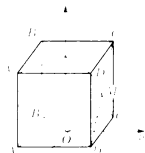


Рис. 1

С-2

- Даны два вектора $\vec{a}(2; 1; -1)$ и $\vec{b}(1; -3; 2)$. Найдите $\vec{a} + 2\vec{b}$ и $\vec{a} - 2\vec{b}$.
- В треугольнике ABC BM — медиана, $A(1; 2; 2)$, $B(2; -2; 6)$, $M(1; 1; 1)$.
1) Найдите координаты точки C .
2) Найдите длину стороны BC .
3) Разложите вектор $\vec{BC}$ по векторам $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$.

С-3

- Ребра правильного тетраэдра $DABC$ равны a , K — середина BC . Найдите:
1) $\vec{DA} \cdot \vec{AK}$;
2) $\vec{DA} \cdot \vec{BC}$.
- В кубе $ABCD A'B'C'D'$ точка M — центр грани $DD'C'C$. Каков угол, острый, прямой или тупой, между векторами $\vec{AM}$ и $\vec{BD}$?

С—4

1. $\vec{a} = \sqrt{2}$, $\vec{b} = 1$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 135$. Найдите угол между векторами $\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{a} - 2\vec{b}$.
2. В тетраэдре $DABC$ основанием служит равнобедренный треугольник ABC , $AB = AC$, $\angle DAC = \angle DAB$. Используя векторы, докажите, что $AD \perp BC$.

С—5

1. Найдите координаты точек, в которые переходит точка $A(100; 200; 1)$ при:
а) центральной симметрии относительно начала координат;
б) зеркальной симметрии относительно плоскости xOy .
2. Докажите, что при движении треугольник отображается на равный ему треугольник.

С—6

1. Докажите, что при движении прямая, перпендикулярная плоскости, отображается на прямую, перпендикулярную плоскости.
2. Исходя из доказанного в задаче 1, докажите, что если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна плоскости, то и другая перпендикулярна этой плоскости.

С—7

1. Через образующую цилиндра проведено два сечения, из которых одно осевое с площадью, равной S . Угол между плоскостями сечений равен 30° . Найдите площадь второго сечения.
2. В правильную треугольную призму вписан цилиндр. Найдите площадь его поверхности, если сторона основания призмы равна $2\sqrt{3}$, а высота 3.

С—8

1. В конусе через его вершину проведена плоскость, пересекающая основание по хорде длиной a , стягивающей дугу в 90° . Наибольший угол между образующими конуса равен 60° . Найдите площадь боковой поверхности конуса.
2. Длины окружностей оснований усеченного конуса равны 12 и 10%. Высота конуса равна 4. Найдите площадь поверхности усеченного конуса.

C—9

1. Прямоугольный треугольник с катетами, равными 3 и 4, вращается вокруг прямой, содержащей гипотенузу. Найдите площадь поверхности тела вращения.
2. В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна a , а боковые грани наклонены к плоскости основания под углом 45° . Найдите площадь боковой поверхности вписанного в пирамиду жидуса.

C—10

1. Точка $A(0; \sqrt{2}; \sqrt{5})$ лежит на сфере с центром $O(3; 0; 0)$.
 - а) Найдите уравнение сферы.
 - б) Принадлежат ли этой сфере точки с координатами $(5; 0; 2\sqrt{3})$; $(4; -1; 0)$?
2. Вершины прямоугольного треугольника с катетами 15 и $\sqrt{351}$ лежат на сфере. Найдите радиус сферы, если расстояние от центра сферы до плоскости треугольника равно 5.

C—11

1. Линия пересечения сферы и плоскости, удаленной от центра сферы на 8, имеет длину 12π . Найдите площадь поверхности сферы.
2. Плоскость пересекает шар. Диаметр, проведенный в одну из точек линии пересечения, составляет с плоскостью угол в 45° . Найдите площадь сечения, если диаметр шара равен $4\sqrt{3}$.

C—12

1. В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна 3, а боковые ребра наклонены к основанию под углом 60° . Найдите радиус описанной вокруг пирамиды сферы.
2. В правильную четырехугольную призму вписана сфера. Найдите отношение площади полной поверхности призмы к площади сферы.

С—13

1. Измерения прямоугольного параллелепипеда относятся как $2 : 3 : 4$. Диагональ параллелепипеда равна $\sqrt{29}$. Найдите его объем.
2. Основанием прямой призмы служит прямоугольный треугольник с углом 30° . Расстояние от бокового ребра, проходящего через вершину прямого угла, до противоположающей боковой грани равно боковому ребру и равно 6. Найдите объем призмы.

С—14

1. Основанием прямой призмы служит треугольник со сторонами 10, 10 и 12. Через большую сторону нижнего основания и середину противоположного бокового ребра проведена плоскость под углом 60° к плоскости основания. Найдите объем призмы.
2. Сечение цилиндра, параллельное его оси, отсекает от окружности основания дугу в 120° . Радиус основания цилиндра равен R , а угол между диагональю сечения и осью цилиндра равен 30° . Найдите объем цилиндра.

С—15

1. Основанием наклонной призмы служит правильный треугольник. Одна из боковых граней является ромбом с диагоналями, равными 6 и 8. Боковые ребра наклонены к основанию под углом 60° . Найдите объем призмы.
2. В наклонном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ боковое ребро равно 10. Расстояния между ребром AA_1 и ребрами BB_1 и DD_1 соответственно равны 5 и 12, а расстояние между AA_1 и CC_1 равно 13. Найдите объем параллелепипеда.

С—16

1. В правильной треугольной пирамиде высота основания равна h , боковые ребра наклонены к основанию под углом α . Найдите объем пирамиды.
2. Основанием пирамиды $MABCD$ служит ромб со стороной a и острым углом A , равным α . Боковое ребро MB перпендикулярно к плоскости основания, а грани MAD и MDC наклонены к нему под углом β . Найдите объем пирамиды.

С—17

1. Через вершину конуса проведена плоскость под углом 60° к плоскости основания, пересекающая основание по хорде, стягивающей дугу в 60° . Высота конуса равна $4\sqrt{3}$. Найдите объем конуса.
2. В правильную четырехугольную пирамиду вписан конус. Найдите отношение объемов конуса и пирамиды.

С—18

1. Стороны оснований правильной четырехугольной усеченной пирамиды равны $6\sqrt{2}$ и $4\sqrt{2}$. Площадь диагонального сечения равна 90 . Найдите объем пирамиды.
2. Радиусы оснований усеченного конуса относятся как $1 : 3$. Образующая конуса равна 4 и составляет с плоскостью основания угол в 60° . Найдите объем конуса.

С—19

1. Площадь поверхности полушара равна 48π . Найдите его объем.
2. В конус, осевое сечение которого правильный треугольник, вписан шар. Найдите отношение их объемов.

ДС

1. Найдите уравнение плоскости, проходящей через точку $M(2; -1; 3)$ и параллельной плоскости $2x - 3y + z - 1 = 0$.
2. Найдите угол между плоскостями $2x + y + z + 1 = 0$ и $x - 2y + 3z - 2 = 0$.

Вариант 2

С-1

1. Куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ помещен в прямоугольную систему координат (рис. 2), $C(-2; 4; 0)$.

1) Найдите координаты всех остальных вершин куба.

2) Найдите координаты векторов $\vec{OC}$, $\vec{OB_1}$ и $\vec{OK}$ и разложите их по векторам $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$.

2. Даны векторы $\vec{a} \{-1; 3; -2\}$, $\vec{b} \{2; -1; 3\}$ и $\vec{p} \{-3; -1; -4\}$. Будут ли коллинеарными векторы $\vec{a} + 2\vec{b}$ и $\vec{p}$?

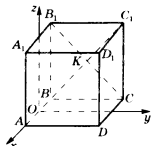


Рис. 2

С-2

1. Даны два вектора $\vec{m} \{-2; 1; -1\}$ и $\vec{n} \{1; 3; 2\}$. Найдите $|2\vec{m} - \vec{n}|$ и $|2\vec{m}| - |\vec{n}|$.

2. В параллелограмме $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O , $A(1; 3; -1)$, $B(-2; 1; 0)$, $O(0; 1,5; 0)$.

1) Найдите координаты вершин C и D .

2) Найдите длину стороны BC .

3) Разложите вектор $\vec{AD}$ по векторам $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$.

С-3

1. В правильной четырехугольной пирамиде $MABCD$ все ребра равны a . Найдите:

1) $\vec{MA} \cdot \vec{AC}$;

2) $\vec{MA} \cdot \vec{DB}$.

2. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ точка K — центр грани $AA_1 B_1 B$. Какой угол, острый, прямой или тупой, между векторами $\vec{A_1 C}$ и $\vec{KD}$?

С-4

1. $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 1$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 120^\circ$. Найдите угол между векторами $\vec{a} - \vec{b}$ и $\vec{a} + 2\vec{b}$.

2. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ основанием служит ромб $ABCD$, $\angle A_1 AD = \angle A_1 AB$. Используя векторы, докажите, что $BD \perp AA_1$.

С—5

1. Найдите координаты точек, в которые переходит точка $B(0,01; 0,65; -1)$ при:
а) осевой симметрии относительно оси Oz ;
б) параллельном переносе на вектор $\vec{p}(0,09; 0,08; 1)$.
2. Докажите, что при движении угол отображается на равный ему угол.

С—6

1. Докажите, что при движении плоскость, перпендикулярная прямой, отображается на плоскость, перпендикулярную прямой.
2. Исходя из доказанного в задаче 1, докажите, что если одна из двух параллельных плоскостей перпендикулярна прямой, то и другая плоскость перпендикулярна этой прямой.

С—7

1. Через образующую цилиндра проведено два сечения, из которых одно осевое. Площадь меньшего из сечений равна Q . Угол между плоскостями сечений равен 60° . Найдите площадь осевого сечения.
2. Вокруг правильной треугольной призмы описан цилиндр. Найдите площадь поверхности цилиндра, если высота призмы равна 4, а высота основания призмы 6.

С—8

1. Через вершину конуса проведена плоскость, пересекающая основание по хорде, длина которой равна m . Угол между образующими в сечении прямой, а наибольший угол между образующими конуса равен 120° . Найдите площадь боковой поверхности конуса.
2. Найдите радиусы основания усеченного конуса, если его боковая поверхность равна 208π , образующая 13, а высота 5.

20—9

1. Правильный треугольник ABC вписан в сферу, основание равно $18\sqrt{2}$, а угол при вершине 120° . Найдите радиус сферы, описанной около треугольника. Найдите площадь поверхности сферы.
2. В правильной пирамиде $ABCD$ с основанием $ABCD$ сторона основания $AB = 10$, а высота $BO_1 = 12$. Найдите радиус сферы, описанной около пирамиды.

21—10

1. Центр сферы имеет координаты $(0; 0; 4)$. Сфера проходит через точку $A(1; 2; 0)$.
1а) Найдите уравнение сферы.
2а) Найдите площадь поверхности сферы, описанной около цилиндра с радиусом основания 3 и высотой 4 .
3. Все стороны пирамиды $ABCD$ касаются сферы. Диаметр сферы равен $10\sqrt{2}$. Найдите радиус сферы, если расстояние от центра сферы до плоскости основания равно 12 .

22—11

1. Сечение шара плоскостью удалено от его центра на 12 , площадь сечения 15π . Найдите площадь поверхности шара.
2. Шар касается двух взаимно перпендикулярных сфер. Диаметр сферы, радиус которой равен 10 , равен $10\sqrt{2}$. Радиус сферы, радиус которой равен $4\sqrt{2}$ касается шара и второй сферы на расстоянии 15 . Найдите радиус шара.

23—12

1. В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна 1 , а основание грани перпендикулярно основанию. Угол 60° . Найдите радиус шара, описанного около пирамиды.
2. В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания равна $2\sqrt{2}$, а боковые ребра $2\sqrt{3}$. Найдите площадь поверхности пирамиды.

С—13

1. Стороны оснований и диагональ прямоугольного параллелепипеда относятся как $1 : 2 : 3$. Длина бокового ребра равна 4. Найдите объем параллелепипеда.
2. В основании прямой призмы лежит равнобедренный прямоугольный треугольник. Диагональ большей боковой грани равна 12 и составляет с плоскостью основания угол в 45° . Найдите объем призмы.

С—14

1. Основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ служит треугольник ABC , у которого $AB = BC = 10$, $\angle ABC = 90^\circ$. Через ребро AA_1 проведена плоскость, перпендикулярная к грани CC_1B_1B . Диагональ сечения составляет с плоскостью основания угол в 45° . Найдите объем призмы.
2. Плоскость, параллельная оси цилиндра, отстоит от нее на расстояние, равное 15. Диагональ получившегося сечения равна 20, а радиус основания цилиндра 17. Найдите объем цилиндра.

С—15

1. Основанием наклонного параллелепипеда служит ромб, одна из диагоналей которого равна 6. Диагональ одной из боковых граней равна $5\sqrt{3}$ и перпендикулярна к плоскости основания. Боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом 60° . Найдите объем параллелепипеда.
2. В наклонной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ боковое ребро равно 10, расстояния от ребра AA_1 до ребер CC_1 и BB_1 равны 13, а расстояние от AA_1 до противоположной боковой грани 5. Найдите объем призмы.

С—16

1. В правильной четырехугольной пирамиде диагональ основания равна d . Боковые грани наклонены к основанию под углом α . Найдите объем пирамиды.
2. Основанием пирамиды $DABC$ служит равнобедренный треугольник ABC , $AB = BC = a$, $\angle ABC = \alpha$. Ребро BD перпендикулярно к плоскости основания, а грань ABC составляет с ним угол β . Найдите объем пирамиды.

§—17

1. Через вершину конуса проведена плоскость, перпендикулярная плоскости основания по хорде, равной $6\sqrt{3}$ и образующей конуса в 15° . Плоскость перпендикулярна плоскости основания угол в 60° . Найдите объем конуса.
2. Вспрут правильной четырехугольной пирамиды основания конуса. Найдите отношение объемов конуса и пирамиды.

§—18

1. Стороны оснований прямой конической усеченной пирамиды равны $5\sqrt{2}$ и $15\sqrt{2}$. Плоскость сечения, проходящего через боковое ребро пирамиды и середину противоположной стороны основания, равна $5\sqrt{3}$. Найдите объем пирамиды.
2. Высота усеченного конуса равна 5, а диаметр основания сечения $\sqrt{3}$. Радиусы оснований относятся как $1:2$. Найдите объем конуса.

§—19

1. Объем шара равен $\frac{32\pi}{3}$. Найдите площадь поверхности шара.
2. Вспрут конуса, у которого площадь сечения и длина окружности шара, описанной, известны. Найдите отношение их объемов.

§20

1. Даны точки $A(1; 2; m)$ и $B(1; 2; m)$ в плоскости $2x - 3y + z - 1 = 0$. При каком значении m эти точки будут вершинами прямой AB ?
2. Найдите угол между прямой AB и плоскостью $2x - 3y + z - 3 = 0$, если $A(1; 2; 1)$ и $B(2; 1; 2)$.

С-1

1. Тетраэдр $DABC$ помещен в прямоугольную систему координат (рис. 3), $\angle ACB = 90^\circ$, $\angle DAC = 30^\circ$, $AB = 10$, $DB \perp AB$. плоскость ADC составляет с плоскостью ABC угол в 60° .
 1) Найдите координаты вершин тетраэдра.
 2) Найдите координаты вектора $\vec{CM}$, где M — точка пересечения медиан треугольника ADB , и разложите этот вектор по векторам $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$.

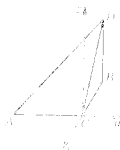


Рис. 3

2. В пространстве заданы четыре точки A , B , C и O , причем $OA(1; -1; 2)$, $OB(3; -2; 4)$ и $OC(5; -3; 6)$. Лежат ли точки A , B и C на одной прямой?

С-2

1. Дан равнобедренный треугольник ABC ($AC = CB$), $A(1; -2; 1)$, $B(3; 2; -3)$. Вершина C лежит на оси Ox . Найдите площадь треугольника ABC .
2. Вектор $\vec{a}$ сонаправлен с вектором $\vec{b}(2; 2; 1)$. Найдите координаты вектора $\vec{a}$, если $|\vec{a}| = 12$.

С-3

1. В прямом параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ все ребра равны a , $\angle B_1 A D_1 = 60^\circ$. Найдите:
 1) $\vec{C_1 D_1} \cdot \vec{A C_1}$;
 2) $\vec{B_1 D_1} \cdot \vec{A C_1}$.
2. Точки $A(4; 4; 5)$, $B(1; 7; 5)$, $C(9; 5; 5)$, $D(5; -1; 5)$ являются вершинами параллелограмма $ABCD$. Найдите бо́льший угол между двумя диагональ параллелограмма.

С—4

1. В тетраэдре $BACD$, $\angle BDC = \angle BDA = \angle DCA = 90^\circ$, $BC = 3$, $AC = 4$. Найдите сумму $\vec{AB} \cdot \vec{AC} + \vec{BC} \cdot \vec{BA} + \vec{CA} \cdot \vec{CB}$.
2. В прямой треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ основанием служит равнобедренный треугольник ABC , $AC = CB = a$, $\angle ACB = 120^\circ$, $AA_1 = a$, E и F — середины соответственно ребер CA и BB_1 . Найдите:
1) длину EF ;
2) угол между прямыми EF и AA_1 .

С—5

1. а) Докажите, что точки $A(1; 2; 3)$ и $B(-1; -2; -3)$ симметричны относительно начала координат.
б) Докажите, что точки $B(3; -4; 5)$ и $C(3; 4; 5)$ симметричны относительно плоскости Oxz .
2. Докажите, что при движении двугранный угол отображается на равный ему двугранный угол.

С—6

1. Докажите, что прямая, содержащая высоту правильной четырехугольной пирамиды, является ее осью симметрии.
2. Исходя из доказанного в задаче 1, докажите, что любое сечение правильной четырехугольной пирамиды, содержащее ее высоту, является равнобедренным треугольником.

С—7

1. Диагональ развертки боковой поверхности цилиндра составляет со стороной основания развертки угол φ . Найдите угол между диагональю осевого сечения цилиндра и плоскостью основания.
2. Страна основания правильной четырехугольной пирамиды равна 10, боковые грани наклонены к основанию под углом 60° . В эту пирамиду вписан цилиндр, одно основание которого лежит в плоскости основания пирамиды, а окружность верхнего основания касается боковой поверхности пирамиды. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, если радиус основания равен 2.

С—8

1. Центральная угол в развёртке боковой поверхности конуса равен 120° . Площадь боковой поверхности равна 12π . Найдите площадь осевого сечения конуса.
2. Образующая усечённого конуса равна L , а высота равна h . Плоскость основания усечённого конуса перпендикулярна образующей. Найдите площадь боковой поверхности конуса.

С—9

1. В тригонометрическом треугольнике ABC $\angle C = 90^\circ$, $\angle B = 60^\circ$, $BC = 1$, $AD \perp AB$, $AD = 2a$. Найдите площадь поверхности тела, образованного при вращении этой треугольной фигуры вокруг прямой, содержащей основание треугольника AD .
2. В основании пирамиды $DABC$ лежит равнобедренный треугольник ABC , у которого $AC = AB = a$, $\angle BAC = \alpha$. Вокруг пирамиды описан конус. Найдите площадь его боковой поверхности, если $\angle DAC = \beta$.

С—10

1. Составьте уравнение сферы, радиус которой равен 2, если известно, что центр сферы лежит в плоскости ABO , а точка сферы проходит через начало координат и точку $A(1; 1; 0)$.
2. Угловые ромба равны α , острый угол в ромбе α . Все стороны ромба параллельны вектору, длина которого равна $\frac{2a}{\sin \alpha}$. Найдите расстояние от центра шара до плоскости ромба.

С—11

1. Соедините парами две пары параллельных плоскостей, между которыми лежит центр шара, площадь поверхности 144 π и 20 π . Найдите площадь поверхности пары, если расстояние между параллельными плоскостями равно 17.
2. Через точку A на поверхности шара, принадлежащую плоскости, касательной к шарику, проведена дуга шара до точки пересечения с осью шара, если угол между радиусами равен 60° , а площадь шара 32 π .

С—12

1. В основании пирамиды лежит треугольник, одна из его сторон которого равна 4, а противолежащий ей угол равен 30° . Боковые ребра пирамиды равны 5. Найдите расстояние от центра описанного около пирамиды параллелепипеда от основания.
2. В основании прямого параллелепипеда лежит ромб с диагональ углом α . В этот параллелепипед вписан шар. Найдите угол между боковой диагональю параллелепипеда и плоскостью основания.

С—13

1. Основанием прямоугольного параллелепипеда служит квадрат. Диагональ параллелепипеда равна d и составляет с боковой гранью угол 30° . Найдите его объем.
2. Основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ служит прямоугольный треугольник ABC ($\angle C = 90^\circ$), $AC = 4$, $BC = 2\sqrt{3}$, $\angle ABC = 30^\circ$. Найдите объем призмы.

С—14

1. В основании прямого параллелепипеда лежит ромб, диагональ которого равна 6 и 8. Плоскость сечения, проходящего через две противоположных ребра верхнего и нижнего оснований, составляет с основанием угол 60° . Найдите объем параллелепипеда.
2. Радиус основания конуса равен 4, а его высота 10. В этот конус вписан цилиндр так, что его верхнее основание касается боковой поверхности конуса, а нижнее лежит в плоскости его основания. Осевое сечение цилиндра — квадрат. Найдите объем цилиндра.

С—15

1. Основанием наклонной призмы $ABCA_1B_1C_1$ служит правильный треугольник ABC , $\angle A_1AC = \angle A_1AB = 60^\circ$. Сторона основания равна a , а боковое ребро b . Найдите объем призмы.
2. В наклонном параллелепипеде боковое ребро наклонено к основанию под углом 60° . Высота параллелепипеда равна $5\sqrt{3}$. Площади двух смежных боковых граней равны 40 и 60. Угол между ними равен 45° . Найдите объем параллелепипеда.

С—16

1. Высота правильной четырехугольной пирамиды равна h , а плоский угол при вершине равен α . Найдите объем пирамиды.
2. В основании пирамиды лежит треугольник со сторонами $\sqrt{5}$, $\sqrt{5}$ и 4. Боковые ребра наклонены к основанию под углом 45° . Найдите объем пирамиды.

С—17

1. Угол в развертке боковой поверхности конуса равен 120° . Площадь боковой поверхности конуса равна 3π . Найдите объем конуса.
2. В правильную треугольную пирамиду вписан конус. Сторона основания пирамиды равна $10\sqrt{3}$. Расстояние от середины высоты пирамиды до боковой грани равно $\frac{30}{13}$. Найдите объем конуса.

С—18

1. В правильной треугольной усеченной пирамиде стороны основания равны a и b ($a > b$). Боковое ребро равно $a - b$. Найдите объем пирамиды.
2. В равнобедренном треугольнике ABC $AB = BC = 10$, $AC = 12$. Треугольник вращается вокруг оси, проходящей через вершину C и перпендикулярной AC . Найдите объем тела вращения.

С—19

1. Шар, радиус которого равен 5, касается плоскости. Через точку касания проведена плоскость, пересекающая шар под углом $\arccos \frac{3}{5}$ к касательной плоскости. Найдите объем меньшей части шара, отсеченной этой плоскостью.
2. Образующая конуса равна 10, а площадь его боковой поверхности 60π . Найдите объем вписанного в конус шара.

ДС

1. Даны шар, ограниченный сферой $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 + (z - 2)^2 = 1$, и плоскость $2x - y + 2z - 1 = 0$. Пересекает ли эта плоскость шар? Если да, то найдите площадь сечения.
2. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точки $A(1; 0; -2)$ и $B(0; 3; 1)$ и параллельной оси Oz .

§—1

1. Тетраэдр $DABC$ помещен в прямоугольную систему координат (рис. 4), $\angle ACD = 90^\circ$, $AB = 8$, $\angle BAC = 60^\circ$, $DB \perp ABC$, плоскость ADC совпадает с плоскостью ABC (угол 60°).
1) Найдите координаты вершин тетраэдра.
2) Найдите координаты вектора AK , где K — точка пересечения медиан грани ABC , а разложите этот вектор по векторам $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$.



5

Рис. 4

2. В пространстве даны три точки A , B и C , причем $AB(2; 3; -1)$, $AC(1; 4; m)$. При каких m и n эти точки лежат на одной прямой?

§—2

1. В треугольнике ABC $BC = AC(3; -4; 1)$, $A(1; -1; 1)$, $B(1; -1; 3)$. Вершина C лежит на поверхности полушара $O(2)$. Найдите длину медианы CM .
2. Вектор $\vec{m}$ перпендикулярно направляет вектору $\vec{p}(1; 2; 1)$. Найдите координаты вектора $\vec{m}$, если $|\vec{m}| = 3\sqrt{6}$.

§—3

1. В правильной треугольной призме $ABC A_1 B_1 C_1$ все ребра равны a , P — середина $A_1 B_1$. Найдите:
1) $C_1 P \cdot B_1 C_1$;
2) $AP \cdot PC_1$.
2. Точки $A(4; 8; 1)$, $B(7; 3; 1)$, $C(6; 1; 1)$, $D(1; 7; 1)$ являются вершинами ромба $ABCD$. Найдите острым угол ромба.

С—4

1. В пирамиде $PHKM$ ребро PM является высотой, $\angle PKH = 90^\circ$. Найдите сумму $\vec{MH} \cdot \vec{MK} + \vec{HK} \cdot \vec{HM} + \vec{KM} \cdot \vec{KH}$, если $MK = 6$, $KH = 8$.
2. В тетраэдре $MAVC$ $MC \perp ACB$, $\angle ACB = 125^\circ$, $AC = a \times 2$, $BC = MC = a$. E и F — середины соответственно ребер CA и BM . Найдите:
 - 1) длину EF ;
 - 2) угол между прямыми EF и CM .

С—5

1. а) Пусть при параллельном переносе на вектор $\vec{p}$ точка $A(1; 2; 3)$ переходит в точку $B(4; 5; 6)$. Найдите координаты $\vec{p}$.
б) Докажите, что точки $A(5; 6; 7)$ и $B(-5; 6; -7)$ симметричны относительно оси Oy .
2. Докажите, что при движении прямая и плоскость, составляющие угол φ , отображаются на прямую и плоскость, составляющие угол φ .

С—6

1. Докажите, что прямая, содержащая точки пересечения диагоналей противоположных граней прямоугольного параллелепипеда, является его осью симметрии.
2. Исходя из доказанного в задаче 1, докажите, что любое сечение прямоугольного параллелепипеда плоскостью, содержащей точки пересечения диагоналей противоположных граней, является прямоугольником.

С—7

1. Угол между диагоналями осевого сечения цилиндра и плоскостью его основания равен α . Найдите угол между диагональю развертки его боковой поверхности и стороной основания развертки.
2. В правильную треугольную пирамиду вписан цилиндр, нижнее основание которого лежит в плоскости основания пирамиды, а окружность верхнего основания касается боковой поверхности пирамиды. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, если сторона основания пирамиды равна $8\sqrt{3}$, а высота цилиндра 2. Боковые грани пирамиды составляют с плоскостью основания угол в 45° .

С-9

1. Центральным углом в равносторонней боковой поверхности конуса равен 240° . Радиус конуса $3\sqrt{3}$. Найдите площадь боковой поверхности конуса.
2. Образующая усеченного конуса составляет с вертикалью дна конуса угол α . Диаметр его основания равен $2a$, периметр основания образующей конуса. Сумма длин образующей и основания равна $27a$. Найдите площадь боковой поверхности конуса.

С-9

1. Диагонали ромба равны 6 и 8. Отрезок, соединяющий вершину ромба с серединой стороны, перпендикулярен к этой стороне. Найдите площадь поверхности полученного тела.
2. В основании пирамиды лежит равнобедренный треугольник, боковая сторона которого равна a , и угол при основании равен α . Боковые грани перпендикулярны основанию под углом α . Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

С-10

1. Составьте усеченную сферу с радиусом основания $3a$, если известно, что центр сферы лежит на оси OZ и сферический радиус равен $5a$.
2. Точки A , B и C лежат на поверхности шара. Хорды AB и BC равны a , угол между ними α . Найдите расстояние от центра шара до плоскости ABC , если площадь боковой поверхности шара равна $\frac{5a^2}{2}$.

С-11

1. Усеченная сфера двумя шара с центрами в основаниях имеет диаметр $10a$ и $2a$. Найдите площадь сферы, если расстояние между центрами равно $7a$ и радиусы сечений лежат на одном радиусе.
2. Через точку на поверхности шара проведены две плоскости, пересекающие его. Общее пересечение усеченной сферы и сферы на расстоянии $2a$ и $3a$ от центра шара равны $40a^2$. Найдите площадь поверхности сферы.

С—12

1. В основании пирамиды лежит прямоугольный треугольник, катеты которого равны 3 и 4. Вершина пирамиды удалена от каждой стороны основания на расстояние, равное 3. Найдите радиус вписанного в пирамиду шара.
2. В основании прямой призмы лежит треугольник со стороной, равной 5. Угол, лежащий против этой стороны, равен 150° . Высота призмы равна 24. Найдите площадь, описанной около призмы сфера.

С—13

1. Основанием прямоугольного параллелепипеда служит квадрат со стороной a . Диагональ параллелепипеда составляет с боковой гранью угол в 30° . Найдите объем параллелепипеда.
2. Основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ служит прямоугольный треугольник ABC ($\angle C = 90^\circ$), $AC = 5$. Плоскость AB_1C составляет с плоскостью основания угол в 45° . Расстояние от вершины B до этой плоскости равно $2\sqrt{2}$. Найдите объем призмы.

С—14

1. Основанием прямого параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ служит параллелограмм $ABCD$, $BD = 6$, $\angle ABD = 90^\circ$, $\angle BDA = 30^\circ$. Плоскость сечения, проходящая через большие два ребра оснований, составляет с основанием угол в 30° . Найдите объем параллелепипеда.
2. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна 8, а ее высота 16. В эту пирамиду вписан цилиндр так, что окружность верхнего основания касается боковой поверхности пирамиды, а нижнее основание лежит в плоскости ее основания. Осевое сечение цилиндра — квадрат. Найдите объем цилиндра.

С—15

1. Основанием наклонного параллелепипеда служит прямоугольник со сторонами, равными a и b . Боковое ребро, равное c , составляет с прилежащими сторонами основания угол в 60° . Найдите объем параллелепипеда.
2. В наклонной треугольной призме высота равна $10\sqrt{2}$, а боковые ребра составляют с плоскостью основания угол в 45° . Площади двух граней равны 100 и 200, а угол между ними 120° . Найдите объем призмы.

С-16

1. Высота прямого двугранного пирамиды равна h , а площадь ее основания при вершине пирамиды α . Найдите площадь пирамиды.
2. В основании пирамиды лежит ромб с диагоналями, равными 60. Боковые грани пирамиды перпендикулярны плоскости основания 60°. Высота пирамиды равна $3\sqrt{3}$. Найдите объем пирамиды.

С-17

1. Длина дуги и радиус развертки боковой поверхности конуса соответственно равны 6, 4 и 3. Найдите объем конуса.
2. В правильной треугольной пирамиде вписан конус. Стороны основания пирамиды равны 6, 3. Расстояние от вершины основания до проекции одной боковой грани равно $\sqrt{6}$. Найдите объем конуса.

С-18

1. В правильной четырехугольной усеченной пирамиде стороны оснований равны m и $2m$, апофема пирамиды равна $\frac{m\sqrt{2}}{2}$. Найдите объем пирамиды.
2. В равнобедренном треугольнике $\triangle ABC$ $\angle C = 120^\circ$, $AB = 18$. Треугольник выделен по рулетом, проходящей через вершину B и перпендикулярной AC . Найдите объем пирамиды.

С-19

1. Шаром сечены и конус вместе с соответствующим шаровой сектор. Высота сечения равна 1, а объем конуса $\frac{4\pi}{3}$. Найдите объем шарового сектора.
2. Объем конуса равен $\frac{128\pi}{3}$, а его высота 6. Найдите объем отсеченного от конуса шара.

С-20

1. Докажите, что плоскость $x = 2y + 2z - 9 = 0$ является касательной к сфере $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 + (z - 1)^2 = 36$.
2. Постройте уравнение плоскости, проходящей через точку $A(1; 1; 2)$, $B(0; 0; 1)$ и $C(1; 0; 1)$ и параллельной оси OZ .

С-1

1. Тетраэдр $DABC$ помещен в декартову систему координат (рис. 5). $AB = AC = 2a$, $BC = AD$, $BO = OC$. Грань ABC составляет с плоскостью основания угол в 45° .
1) Найдите координаты вершин тетраэдра.
2) Найдите координаты вектора $\vec{OK}$, где K — основание перпендикуляра, опущенного из точки O на грань ACD , и разложите вектор $\vec{OK}$ по векторам $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$.

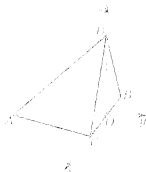


Рис. 5

2. Про какие значения m векторы $\vec{a} (2; -1; 3)$, $\vec{b} (1; 3; -2)$ и $\vec{c} (m; 2; 1)$ коллинеарны?

С-2

1. В правильной четырехугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ стороны основания равны 2, а боковое ребро 4. E — середина CD и K — середина $A_1 C_1$; DK пересекает $D_1 C_1$ в точке P . Найдите расстояние между серединой M отрезка $B_1 E$ и точкой P .
2. Прямая AB задана двумя точками $A (-1; 2; 1)$ и $B (2; 1; -1)$. Найдите координаты точки M , лежащей на этой прямой, если $AM = 3\sqrt{14}$.

С-3

1. Вектор $\vec{a}$ образует с векторами $\vec{i}$ и $\vec{j}$ соответственно углы 120° и 135° . Найдите угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{j}$.
2. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ точка M — центр грани $A_1 B_1 B A_1$, K — середина AD . Найдите площадь треугольника $MC_1 K$, если ребро куба равно 1.

C—4

1. В правильной трехугольной призме $ABC A_1 B_1 C_1$ основание — равносторонний треугольник, $AB_1 \perp BB_1$, $AC \perp BD$, $AC = 4$, $BB_1 = 2$. Через середину диагонали BC_1 боковой грани перпендикулярно этой грани проведена плоскость. Найдите угол между прямой AB_1 и этой плоскостью.
2. В тетраэдре $ABDC$ $BD \perp BC$, $BA \perp AB_1$, $ABD = ABC = 60^\circ$, $\angle CDB = 90^\circ$. Используя векторы, докажите, что плоскости DAC и DBC перпендикулярны.

C—5

1. Прямая a содержит биссектрису угла, образованного плоскостями α и β с осью Ox и Oy . Найдите координаты точки A , в которой пересекаются плоскости α и β при условии, что a параллельна относительно прямой a .
2. Используя матрицу перехода к отображению аффинного тела, при котором любая точка с координатами Ox и Oy переходит в точку с координатами $2Ox$ и $2Oy$.

C—6

1. Докажите, что прямая, содержащая середины противоположных ребер правильного тетраэдра, является осью симметрии.
2. Неходя на голаканного в задаче 1, докажите, что каждая плоскость, проведенная через середины противоположных ребер правильного тетраэдра, делит этот тетраэдр на две равные части.

C—7

1. В цилиндре, высота которого равна a , вписан правильный тетраэдр, у которого одна сторона равна a , а другая — $a\sqrt{3}$. Плоскость основания тетраэдра параллельна основанию цилиндра. Найдите, что вершина прямого угла тетраэдра находится в окружности основания цилиндра. Найдите площадь боковой поверхности основания цилиндра.
2. Все ребра правильной трехугольной призмы равны боковым ребрам ее индольной осевой пирамиды. Найдите отношение радиусов a . Найдите площадь боковой поверхности тела, образованного указанными пирамидами и поверхностями a и $a\sqrt{3}$ основания основания.

С—13

1. Центральным углом в сечении боковой поверхности конуса равен 270° . Через вершину конуса проведено сечение наибольшей площади. Найдите угол между плоскостью сечения и плоскостью основания.
2. Через вершину конуса конусом проведена плоскость, параллельная основанию. Плоскости сечений поверхностей частей конуса, которые при этом образуются, относятся как 8 : 11. Найдите угол между образующей конуса и плоскостью основания.

С—14

1. В равнобедренном треугольнике боковая сторона равна a , а угол при вершине равен 135° . Треугольник вращается вокруг прямой, проведенной через вершину треугольника, перпендикулярной плоскости, заданной при основании. Найдите площадь поверхности тела вращения.
2. В правильной треугольной пирамиде боковые ребра перпендикулярны к плоскости основания под углом α . Образуемый сечением и пирамидой конус равен m . Найдите площадь сечения конуса.

С—15

1. Дана сфера $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ и на ней точки $A(1; 2; 1)$, $B(1; 1; 2)$. Через точки A и $B(1; 1; 2)$ проведена прямая. Найдите координаты точек пересечения этой прямой с сферой.
2. Плоскость проходит через точки $A(3; 0; 0)$, $B(0; 1; 0)$ и $C(0; 0; 1)$. Пересекает ли эта плоскость сферу

$$x^2 + y^2 + z^2 - \frac{1}{2}x - \frac{19}{16}z = 0?$$

Если да, то найдите длину линии пересечения.

С—16

1. Два взаимно перпендикулярных сечения конуса имеют общую хорду длиной 12. Зная, что площади этих сечений 1600 и 640, найдите радиус конуса.
2. Конус, осевое сечение которого прямоугольный треугольник, и полукруг с радиусом R имеют общее основание. Параллельно основанию полукруга проведена плоскость. Найдите расстояние от проекции плоскости до центра полукруга так, чтобы площади сечения конуса образовались при пересечении полукруга и конуса этой плоскостью, были наибольшими.

§—12

1. Из вершины K пирамиды, в основании которой лежит два раза, одно на боковых ребрах вершины K и одно на боковых ребрах основания, и параллельно боковому ребру образован сечущий LMN . Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.
2. Основание пирамиды — произвольный треугольный участок на площадке, стороны основания которой равны a , b и c . Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

§—13

1. Стороны основания произвольного параллелепипеда равны 6 и 8. Через диагональ основания проведена плоскость, параллельная диагонали параллелепипеда. Эта плоскость совпадает с плоскостью основания угла в 45° . Найдите объем параллелепипеда.
2. Основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ служит прямой угольный треугольник ABC с $\angle C = 90^\circ$, $AC = BC = a$. Диагональ боковой грани B_1C составляет с плоскостью грани $A_1A_1B_1B$ угол α . Найдите объем призмы.

§—14

1. Диагонали BF и BE произвольной четырехугольной призмы $ABCEFA, B_1C_1D_1E_1F_1$ равны соответственно 24 и 25. Найдите объем призмы.
2. Основание параллелепипеда — параллелограмм, стороны которого основаниям углу в 120° . Найдите отношение объемов частей, на которые эти диагонали разделили параллелепипед.

§—15

1. Основанием прямой призмы служит произвольный треугольник. Все ребра призмы равны между собой, одно на боковых ребрах составляет с параллельными сторонами основания угол в 45° . Найдите боковой поверхности призмы равны $144 \times \sqrt{2}$. Найдите объем призмы.
2. В произвольной треугольной призме расстояние от бокового ребра до диагонали противоположной боковой грани равно $5a$, а площадь этой грани — $10a$. Найдите объем призмы.

С—16

1. Основанием пирамиды $MABC$ служит прямоугольный треугольник ABC , $\angle C = 90^\circ$, $\angle A = \alpha$. Грань AMB перпендикулярна плоскости основания, а остальные две грани наклонены к нему под углом β . Расстояние от основания высоты до грани BMC равно d . Найдите объем пирамиды.
2. В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна a , а угол между смежными боковыми гранями α . Найдите объем пирамиды.

С—17

1. Два конуса расположены так, что основания их параллельны и вершина каждого из них расположена в центре основания другого. Найдите объем общей части конусов, если образующая одного из них равна a и составляет с высотой угол β , а наибольший угол между образующими другого конуса равен α .
2. Основанием пирамиды служит равнобедренная трапеция, основания которой равны 10 и 20, а боковая сторона равна 10. Объем описанного около пирамиды конуса равен $\frac{1000\pi\sqrt{3}}{3}$. Найдите угол наклона боковых ребер к плоскости основания.

С—18

1. Основаниями треугольной усеченной пирамиды служат правильные треугольники со сторонами 4 и 12. Одна боковая грань перпендикулярна плоскости основания, а две другие составляют с ней угол в 60° . Найдите объем пирамиды.
2. Параллелограмм $ABCD$ вращается вокруг прямой, проходящей через вершину A параллельно меньшей диагонали BD . Найдите объем тела вращения, если в данном параллелограмме $\angle A = 60^\circ$, большая сторона равна 6, а меньшая диагональ перпендикулярна стороне.

С—19

1. Найдите объем двояковыпуклого стекла, у которого радиусы поверхностей 13 и 20, а расстояние между центрами 21.
2. Объем конуса в $2\frac{1}{4}$ раза больше объема вписанного в него шара. Найдите величину угла между образующей конуса и плоскостью основания.

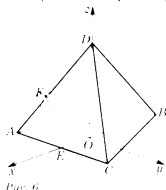
ДС

1. Дана плоскость $x + y - z - 2 = 0$ и точка $A_1(1; 1; 1)$. Найдите координаты точки A_2 , которая симметрична данной точке A относительно указанной плоскости.
2. Плоскость α проходит через точку $M(1; 1; -2)$ и пересекает плоскость xOy по прямой $y = x - 1$. Найдите уравнение этой плоскости.

Вариант 6

С-1

- Правильная треугольная пирамида $DABC$ помещена в прямоугольную систему координат (рис. 6). Сторона основания равна 2, боковая грань наклонена к основанию под углом в 60° .
 1) Найдите координаты вершин пирамиды.
 2) Найдите координаты вектора $\vec{OK}$, где $OK \perp AD$, и разложите этот вектор по векторам $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$.



- При каких значениях y векторы $\vec{m} (2; -1; 3)$, $\vec{n} (3; 4; -2)$ и $\vec{p} (10; y; 2)$ компланарны?

С-2

- В прямой треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, $\angle ABC = 90^\circ$, $AB = 6$, $BC = 8$, $BB_1 = 8$. Через вершину A и середину P ребра B_1B проведена плоскость, параллельная BC . Найдите расстояние от центра K описанной вокруг основания окружности до точки M пересечения медиан сечения.
- Прямая EF задана двумя точками $E (1; 2; 2)$ и $F (2; 1; 3)$. Точка P лежит на луче, противоположном лучу EF , $EP = 5\sqrt{11}$. Найдите координаты точки P .

С-3

- Вектор $\vec{m}$ образует с векторами $\vec{i}$ и $\vec{j}$ углы в 60° . Найдите угол, который образует этот вектор с вектором $\vec{k}$.
- В кубе $ABCA_1B_1C_1D_1$ точка E — середина AA_1 , а F — центр грани DD_1C_1C . Найдите площадь треугольника EBF , если ребро куба равно 1.

С—4

1. В основании пирамиды $DABC$ лежит прямоугольный треугольник ABC ($\angle C = 90^\circ$), $BD \perp ABC$, $AC = CB = 1$, $BD = 2$. Через середину ребра DC перпендикулярно к нему проведена плоскость. Найдите угол между AD и этой плоскостью.
2. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $AB = 2$, $BC = AA_1 = 1$. Докажите, что диагональ BD_1 перпендикулярна плоскости $A_1 C_1 D$.

С—5

1. Плоскость α содержит ось Ox и биссектрису угла, образованного осями Oz и Oy . Найдите координаты точки, в которую переходит точка $B(0; 20; 10)$ при зеркальной симметрии относительно плоскости α .
2. Является ли движением отображение пространства на себя, при котором любая точка с координатами $(x; y; z)$ переходит в точку с координатами $(x - 5; z + 3; z - 7)$?

С—6

1. Докажите, что точка пересечения диагоналей параллелепипеда является его центром симметрии.
2. Неходя из доказанного в задаче 1, докажите, что каждая плоскость, проведенная через точку пересечения диагоналей параллелепипеда, делит его на равные части.

С—7

1. Вершины прямоугольника лежат на окружностях оснований цилиндра. Стороны прямоугольника относятся как $1 : 2$, причем меньшие стороны лежат в плоскостях оснований. Высота цилиндра равна 5, а радиус основания 2,5. Плоскость прямоугольника пересекает ось цилиндра. Найдите площадь прямоугольника.
2. Все ребра правильной треугольной призмы равны a . Боковые ребра ее являются осями цилиндрических поверхностей радиуса $\frac{a}{2}$. Найдите площадь боковой поверхности тела, ограниченного указанными цилиндрическими поверхностями, плоскостями оснований призмы и лежащего внутри призмы.

С—8

1. Центральным углом и развертке боковой поверхности конуса равен 200° . Через вершину конуса проведено сечение равнобедренной пирамиды. Найдите угол между плоскостью сечения и плоскостью основания.
2. Радиусы оснований усеченного конуса относятся как $1 : 2$. Через середину высоты конуса проведена плоскость, параллельная основанию и делющая конус на части, равные по поверхности. Каковы отношения $\sin 2\alpha : \sin 2\beta$. Найдите угол наклона образующей к плоскости основания.

С—9

1. Периметры параллелограмма равен P , а длина его стороны d . Параллелограмм принадлежит окружности, проходящей через вершину параллелограмма и перпендикулярной той для высоты. Найдите площади поверхности тела вращения.
2. В правильной пятиугольной пирамиде угол наклона боковой грани к плоскости основания равен φ . Образующая правильной пирамиды конуса равна l . Найдите площадь сечения конуса.

С—10

1. Прямая задана уравнением $A(1; 2; -1)$ и $B(3; 0; 2)$. Найдите координаты точки пересечения прямой AB со сферой $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = \frac{17}{4}$.
2. Плоскость π проходит через точки $A(2; 0; 0)$, $B(0; 0; 2)$ и $C(0; 1; 0)$. Вле извне заданное расстояние сфера

$$x^2 + y^2 + \frac{z^2}{3} = R^2$$

и плоскости ABM и длина дуги от B .

С—11

1. Площадь боковой части круга радиуса 50π . Два взаимно перпендикулярных сечения круга имеют общую хорду длиной 6. Найдите расстояние от центра круга до плоскости сечения, если площадь одного из них 25π .
2. Из центра окружности в плоскости, параллельной основанию, построились четыре взаимно перпендикулярных отрезка, равные по длине основаниям полушария. Найдите расстояние от плоскости сечения до центра полушария так, чтобы площадь боковой поверхности полушария была равна нулю.

С—12

1. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a . Поверхность вписанного в пирамиду шара делит высоту пирамиды пополам. Найдите боковое ребро пирамиды.
2. В шар радиуса R вписана правильная шестиугольная призма. Радиус, проведенный в вершину призмы, образует с плоскостью боковой грани угол в 45° . Найдите площадь боковой поверхности призмы.

С—13

1. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $AB = 6$, $BC = \frac{12}{\sqrt{3}}$. Через диагональ основания и вершину B_1 проведена плоскость, удаленная от вершины B на расстояние, равное $2,4$. Найдите объем параллелепипеда.
2. В прямой призме $ABCA_1 B_1 C_1$ основанием служит прямоугольный треугольник ABC ($\angle C = 90^\circ$), $\angle ABC = \beta$. Через диагональ боковой грани $B_1 C$ проведена плоскость, перпендикулярная грани $AA_1 B_1 B$ и составляющая с плоскостью основания угол α . Высота призмы равна h . Найдите объем призмы.

С—14

1. Диагональ $C_1 E$ правильной шестиугольной призмы $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ равна $3\sqrt{3}$, $\angle FC_1 E = \arctg \frac{1}{3}$. Найдите объем призмы.
2. Сечение, параллельное оси цилиндра, отсекает от окружности основания дугу в 60° . Найдите отношение объемов частей, на которые эта плоскость разделила цилиндр.

С—15

1. Основанием наклонной призмы $ABCA_1 B_1 C_1$ служит прямоугольный треугольник ABC ($\angle C = 90^\circ$). Плоскость грани $AA_1 C_1 C$ перпендикулярна плоскости основания. Боковое ребро призмы наклонено к основанию под углом 60° и равно катетам основания. Площадь боковой поверхности призмы равна $2(\sqrt{7} + \sqrt{3} + 2)$. Найдите объем призмы.
2. В наклонной треугольной призме угол между боковым ребром и сцицирующей с ним стороной основания равен 45° . Длина этой стороны равна 6 , а расстояние от бокового ребра до боковой грани, содержащей эту сторону, 4 . Длина бокового ребра равна 5 . Найдите объем призмы.

С—16

1. Основанием пирамиды $DABC$ служит равнобедренный треугольник ABC , $AB = BC$, $\angle ABC = \alpha$. Грань ADC перпендикулярна плоскости основания, а остальные две грани наклонены к нему под углом β . Расстояние от основания высоты до боковой грани BDC равно d . Найдите объем пирамиды.
2. В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания равна a , а угол между смежными боковыми гранями α . Найдите объем пирамиды.

С—17

1. Два конуса расположены так, что основания их параллельны и вершины каждого из них расположены в центре основания другого. Найдите объем общей части этих конусов, если радиусы их оснований равны 4 и 6, а общая высота равна 15.
2. Конус вписан в пирамиду, основанием которой служит прямоугольная трапеция с основаниями, равными 2 и 4. Объем конуса равен $\frac{64\pi}{81}$. Найдите угол наклона боковых граней к плоскости основания.

С—18

1. Основаниями усеченной пирамиды служат ромбы. Диагонали нижнего основания равны 12 и 16, а верхнего — 8 и 6. Две боковые грани, проходящие через стороны тупых углов ромбов, перпендикулярны плоскости основания, а остальные две из них составляют с основанием угол в 45° . Найдите объем пирамиды.
2. Расстояние между основаниями перпендикуляров, опущенных из вершин тупого угла ромба на его стороны, равно 20. Найдите объем тела, полученного от вращении ромба вокруг оси, проходящей через вершину острого угла, равного 60° , и перпендикулярной большей диагонали.

С—19

1. Найдите объем выпукло-вогнутой линзы, у которой радиусы поверхностей равны 25 и 29, а расстояние между центрами 6.
2. Отношение объема конуса к объему вписанного в конус шара равно $8 : 3$. Найдите величину угла при вершине осевого сечения конуса.

ДС

1. Дана прямая EF , где $E(1; -2; 1)$ и $F(2; -1; 3)$, и плоскость $x - 2y + z - 3 = 0$. Найдите координаты точки P пересечения этой прямой с плоскостью.
2. Напишите уравнение плоскости, проходящей через точки $A(1; -1; 1)$ и $B(2; 1; -1)$ и перпендикулярной плоскости $x - 2y + z - 1 = 0$.

Вариант 7

С—1

1. В прямой треугольной призме $ABC A_1 B_1 C_1$ точки F , M и K — середины ребер AA_1 , $A_1 B_1$ и BC соответственно, а точка E делит ребро $B_1 C_1$ в отношении $1 : 5$, считая от вершины B_1 . $\angle ABC = 90^\circ$. Боковые ребра призмы и катеты основания равны между собой. Используя метод координат, установите, лежат ли точки F , M , E и K в одной плоскости.
2. Даны три некопланарных вектора $\vec{p} \{1; 2; 1\}$, $\vec{q} \{2; 0; -1\}$, $\vec{m} \{1; 1; 2\}$. Разложите вектор $\vec{a} \{1; 2; -2\}$ по векторам $\vec{p}$, $\vec{q}$ и $\vec{m}$.

С—2

1. В тетраэдре $DABC$ $DB \perp ABC$, $DB = 1$, $AB = BC$, $BE \perp AC$, $BE = AC = 1$. Точка P равноудалена от всех вершин тетраэдра. Найдите расстояния от точки P до вершин тетраэдра.
2. Решите уравнение

$$\sqrt{(x-1)^2 + y^2 + z^2} + \sqrt{x^2 + (y-1)^2 + z^2} = 1.$$

С—3

1. В основании пирамиды $MABCD$, помещенной в прямоугольную систему координат, лежит ромб $ABCD$, $A(3; 10; 5)$, $C(5; 4; 1)$, $M(5; 8; 3)$. $\angle MAD = \angle MAB$. Найдите высоту пирамиды.
2. Используя скалярное произведение векторов, найдите наибольшее значение выражения

$$\sqrt{\sin^2 x + 0,5} + \sqrt{\cos^2 x + 0,5} + \sqrt{0,5}.$$

При каком значении x оно достигается?

С—4

1. В основании пирамиды $MABC$ лежит прямоугольный треугольник ABC ($\angle C = 90^\circ$), $AC = 3$, $BC = 5$. Ребро AM перпендикулярно стороне основания AC , $AM = 4$, $MB = \sqrt{30}$. Найдите высоту пирамиды.
2. В тетраэдре $DABC$ углы ADB , ADC и BDC тупые, $AD = BD = CD$. Докажите, что треугольник ABC остроугольный.

С—5

1. Пусть m и n — пересекающиеся перпендикулярные прямые. Докажите, что композиция симметрий относительно этих прямых есть симметрия относительно прямой, которая перпендикулярна этим прямым.
2. Является ли движением отображение пространства на себя, при котором любая точка с координатами $(x; y; z)$ переходит в точку $(x + 2; y - 3; z + 1)$? Если да, то каким образом может быть получена такая точка?

С—6

1. Дана осевая симметрия S и S' пространств p и q — оси симметрии, которые не совпадают; $S \circ S'$ и $S' \circ S$ — композиции этих симметрий. Докажите, что если $S \circ S' \circ S = S'$, то p и q — пересекающиеся прямые.
2. На данной прямой l найдите точку, симметричную данной точке A относительно точки, лежащей в плоскости α l пересекает плоскость в точке M).

С—7

1. $ABCD$ и $EFKL$ — два взаимно перпендикулярных осевых сечения цилиндра, причем AD и EL — диаметры одного основания, M — середина образующей AB , $ML \perp AC$. Площадь осевого сечения равна 4. Найдите площадь поверхности цилиндра.
2. В правильной четырехугольной пирамиде $MABCD$ сторона основания равна a , а боковые грани наклонены к плоскости основания под углом $\varphi = \arctg 2$. В эту пирамиду вписан равносторонний цилиндр (осевое сечение — квадрат), у которого одна образующая принадлежит плоскости основания, а окружности оснований касаются апофем граней AMB и DMC . Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

С—8

1. Точки $A(1; 2; -2)$, $B(1; 2; -2)$, $C(3; 1; -2)$ лежат на окружности основания конуса, высота которого равна 3. Конус пересекает плоскость $z = 0$. Найдите площадь сечения конуса этой плоскостью, координаты вершины конуса и площадь боковой поверхности конуса.
2. Диагонали осевого сечения усеченного конуса взаимно перпендикулярны. Площадь боковой поверхности усеченного конуса относится к площади боковой поверхности конуса, образующей которого служит диагональ сечения, а радиусом основания — его высота, как $\sqrt{6} : 3$. Найдите угол наклона образующей к плоскости основания.

С—9

1. На рисунке 7 изображена 8-звенная ломаная линия, все звенья которой равны a , а угол между звеньями α . Найдите площадь поверхности, которая образуется при вращении этой ломаной вокруг оси l .



Рис. 7

2. Все ребра правильной треугольной призмы равны a . Четыре вершины призмы лежат в плоскости основания конуса, а две другие — на его боковой поверхности. Образующая конуса составляет с плоскостью основания угол φ . Найдите площадь осевого сечения конуса и ее наименьшее возможное значение. При каком значении угла φ это достигается?

С—10

1. Сфера, заданная уравнениями $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - z = 0$ и $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y - 2z - 6 = 0$, пересекаются. Найдите длину линии пересечения этих сфер.
2. Найдите множество точек, расположенных вдвое ближе к точке $A(2; 0; 0)$, чем к точке $B(-4; 0; 0)$.

С—11

1. Из точки поверхности шара проведены три равные хорды под углом α одна к другой. Найдите их длину, если радиус шара равен R .
2. Из одной точки сферы проведены три попарно перпендикулярные хорды длиной a , b и c . Найдите площадь сферы.

С—12

1. Все ребра четырехугольной пирамиды равны a . Высота пирамиды является диаметром шара. Найдите длину линии пересечения поверхностей этих тел.
2. В куб с ребром, равным a , вписан шар. Затем в один из трехгранных углов при вершине куба вписан второй шар, касающийся первого шара. Найдите радиус второго шара.

С—13

1. Стороны AB и BC основания прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равны соответственно 6 и 8. Через середины сторон AD и CD и вершину B_1 проведем плоскость, составляющая с плоскостью основания угол в 45° . Найдите объем параллелепипеда.
2. Основанием прямой призмы $ABCA_1 B_1 C_1$ служит прямоугольный треугольник ABC ($\angle C = 90^\circ$), $BC = 4$, $BB_1 = 3$. Угол между диагоналями граней AC_1 и CB_1 равен $\arccos \frac{3\sqrt{2}}{10}$. Найдите объем призмы.

С—14

1. Около куба описана призма так, что все вершины куба являются серединами сторон оснований призмы. Основанием призмы служит трапеция, основания которой равны a и b . Найдите объем призмы.
2. Корыто полуцилиндрической формы наполнено до краев жидкостью. Сколько процентов жидкости выльется, если корыто наклонить на 30° так, чтобы образующие цилиндра оставались горизонтальными?

С—15

1. Основанием наклонной треугольной призмы $ABCA_1 B_1 C_1$ служит правильный треугольник ABC со стороной, равной a . Боковое ребро равно b , $\angle A_1 AC = 60^\circ$, $\angle A_1 AB = 45^\circ$. Найдите объем призмы.
2. В наклонной четырехугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ основанием служит четырехугольник $ABCD$, у которого $AC = 5$, $BD = 4$ и $AC \perp BD$. Диагональное сечение $BB_1 D_1 D$ — прямоугольник, а площадь сечения $AA_1 C_1 C$ равна 30. Найдите объем призмы.

С—16

1. В основании треугольной пирамиды $MABC$ лежит правильный треугольник ABC со стороной, равной $\sqrt{2}$, $MA = \sqrt{2}$. Боковые грани пирамиды имеют равные площади. Найдите объем пирамиды.
2. В тетраэдре $DABC$ $M \in AB$, причем $AM = \frac{1}{3}AB$, P — середина медианы AF грани ABC , а K — середина медианы AL грани ADB . Через точки M , K и P проведена плоскость. В каком отношении эта плоскость делит объем пирамиды?

С—17

1. Через вершину конуса проведено сечение, имеющее наибольшую площадь. Площадь этого сечения составляет $\frac{1}{3}$ от площади основания, угол $\arccos \frac{1}{3}$. Образующая конуса равна L . Найдите объем меньшей части конуса, отсеченной этой плоскостью.
2. Длина бокового ребра правильной треугольной пирамиды равна 10, длина стороны основания 12. Боковая грань пирамиды вписана в окружность основания конуса, образующей которого принадлежит боковое ребро пирамиды. Найдите объем конуса.

С—18

1. Стороны основания правильной четырехугольной усеченной пирамиды равны a и b ($a > b$). Через противоположные стороны верхнего и нижнего оснований проведена плоскость. В каком отношении эта плоскость делит объем пирамиды?
2. Прямоугольный треугольник ABC ($\angle C = 90^\circ$), у которого катет $BC = a$ и $\angle A = 60^\circ$, вращается вокруг прямой, проходящей через вершину A и перпендикулярной биссектрисе угла A . Найдите объем тела вращения.

С—19

1. Основанием пирамиды служит правильный треугольник со стороной, равной 1. Основание K высоты пирамиды лежит на расстоянии $2 - \frac{\sqrt{3}}{3}$ от центра O этого треугольника, причем луч OK проходит через одну из его вершин. Найдите площадь поверхности вписанного в пирамиду шара, если высота пирамиды равна $\frac{1}{\sqrt{3}}$.
2. Полный шар радиуса 9 см, толщина стенок которого 3 см, плавает в воде, причем из воды выступает его часть высотой 6 см. Найдите плотность материала, из которого изготовлен шар.

ДС

1. В правильной четырехугольной пирамиде $MABCD$ сторона основания равна 2, а высота 1. Используя метод координат, найдите угол между AM и плоскостью DMC .
2. Найдите уравнение плоскости, проходящей через точки $A(1; -1; 1)$ и $B(2; 0; 1)$, которая была бы перпендикулярна направлению вектора $\vec{m}(3; 1; -1)$.

Вариант 8

С—1

1. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ точки M , P , F и K — середины ребер AD , AA_1 , $A_1 B_1$ и $C_1 C$ соответственно. Используя метод координат, установите, лежат ли точки M , P , F и K в одной плоскости.
2. Разложите вектор $\vec{m} \{1; 1; 1\}$ по трем неколлинеарным векторам $\vec{a} \{1; 1; -2\}$, $\vec{b} \{1; -1; 0\}$ и $\vec{c} \{0; 2; 3\}$.

С—2

1. В тетраэдре $DABC$ $AD \perp ABC$, $AD = 2$, $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = CB = 4$. Точка M равноудалена от всех вершин тетраэдра. Найдите расстояния от этой точки до вершин тетраэдра.
2. Укажите в пространственной системе координат все решения уравнения

$$\sqrt{x^2 + y^2 + (z - 1)^2} + \sqrt{(x - 1)^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{2}.$$

С—3

1. В тетраэдре $DABC$, помещенном в прямоугольную систему координат, основанием служит равнобедренный треугольник ABC , $AB = AC$. Высоты граней ADC и ADB , проведенные из вершины D , равны между собой. $A(1; 0; -2)$, $D(2; -1; 1)$, $K(0; 1; -1)$ — середина BC . Найдите высоту пирамиды.
2. Используя скалярное произведение векторов, найдите наибольшее значение суммы $\sqrt{1 + x} + \sqrt{1 - x} + 1$. При каком x это значение суммы достигается?

С—4

1. В тетраэдре $DABC$ $DB = DC = CB = AC = 3\sqrt{2}$, $AD = 3$, $\angle ACB = 90^\circ$. Найдите высоту пирамиды, опущенную на вершину D .
2. В пирамиде $MEFKP$ плоские углы при вершине M равны α . Вычислите угол β при вершине диагонального сечения EMK .

С–5

1. Докажите, что композиция трех центральных симметрий относительно точек A , B и C (точки не лежат на одной прямой) есть центральная симметрия относительно точки D , являющейся вершиной параллелограмма $ABCD$.
2. Является ли движением отображение пространства на себя, при котором любая точка с координатами $(x; y; z)$ переходит в точку $(x - 1; y - 2; z + 1)$? Если да, то каким образом может быть получена такая точка?

С–6

1. Докажите, что биссектриса линейного угла двугранного угла является осью симметрии двугранного угла.
2. Из вершин параллелепипеда проведены три диагонали его граней. На этих отрезках как на ребрах построен параллелепипед. Докажите, что противоположная вершина данного параллелепипеда служит центром симметрии построенного.

С–7

1. $ABCD$ и $EFGH$ — два взаимно перпендикулярных осевых сечения цилиндра, причем AD и EL — диаметры одного основания, M — середина FA , а N — середина AL , $MN = \sqrt{17}$. Площадь осевого сечения равна 16. Найдите площадь поверхности цилиндра.
2. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна a . Боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом 60° . В эту пирамиду вписан цилиндр, боковая поверхность которого касается оснований пирамиды, а окружности оснований — боковых граней, причем образующая цилиндра расположена на диагонали основания. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, если его высота равна h .

С–8

1. Точки $A(1; -1; 2)$, $B(-2; -1; 2)$, $C(-2; 3; 2)$ лежат на окружности основания конуса. Точка $M(0; \frac{5}{3}; 6)$ лежит на его боковой поверхности. Найдите площадь боковой поверхности конуса.
2. Образующая усеченного конуса равна 1, диагонали осевого сечения взаимно перпендикулярны. Площадь боковой поверхности конуса равна $\frac{\pi}{2}(\sqrt{3} + 1)$. Найдите угол наклона образующей к плоскости основания.

С—9

1. На рисунке 8 изображено четыре квадрата со стороной, равной a . Найдите площадь поверхности, которая образуется при вращении этой фигуры вокруг оси l .



Рис. 8

2. Правильная треугольная призма, все ребра которой равны, вписана в конус, причем три ее вершины лежат на боковой поверхности конуса, а три — в плоскости основания. Образующая конуса составляет с плоскостью основания угол φ . Найдите площадь осевого сечения конуса и ее наименьшее значение. При каком значении φ оно достигается?

С—10

1. Даны две сферы. Первая задана уравнением $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 20 = 0$, вторая сфера с центром в точке $O(2; 4; 2)$. Они пересекаются по окружности, длина которой равна $2\pi\sqrt{21}$. Найдите уравнение второй сферы.
2. Найдите множество точек, расположенных вдвое ближе к точке $M(0; 2; 0)$, чем к точке $P(0; 4; 0)$.

С—11

1. Четыре шара радиуса R расположены так, что каждый шар касается трех других. Найдите радиус сферы, которая внутренним образом касается данных шаров.
2. Шар касается всех ребер тетраэдра. Сравните сумму длин сепантивующихся ребер тетраэдра.

С—12

1. В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна a . Боковые грани наклонены к основанию под углом 60° . Высота пирамиды является диаметром шара. Найдите длину линии пересечения поверхности этих тел.
2. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a , двугранный угол при основании пирамиды 60° . В пирамиду вписаны три равных шара, каждый из которых касается двух других шаров, плоскости основания и одной из боковых граней пирамиды. Зная, что точки касания шаров с основанием лежат на апофемах основания, найдите радиус шара.

С—13

1. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $AB = 5$, $BC = 12$. Через диагональ основания AC проведена плоскость, составляющая с плоскостью основания угол в 60° . Найдите объем параллелепипеда.
2. Основанием прямой призмы $ABC A_1 B_1 C_1$ служит прямоугольный треугольник ABC ($\angle C = 90^\circ$), $AC = 3$, $CB = 6$. M — точка пересечения медиан треугольника ABC , а P — центр симметрии грани $CC_1 B_1 B$. Прямая MP составляет с плоскостью грани $AA_1 C_1 C$ угол $\arcsin \frac{1}{\sqrt{3}}$. Найдите объем призмы.

С—14

1. Площадь боковой грани правильной шестиугольной призмы равна Q . Через боковое ребро проведено сечение, которое разделило призму на части, объемы которых относятся как $1 : 3$. Найдите площадь сечения.
2. Две образующие цилиндра с квадратным осевым сечением лежат на основаниях другого цилиндра, а окружности его оснований касаются боковой поверхности другого цилиндра. Найдите отношение объемов этих цилиндров.

С—15

1. Основанием наклонной призмы $ABC A_1 B_1 C_1$ служит треугольник ABC , у которого $AB = 50$, $AC = 40$ и $\angle BAC = 60^\circ$, $AA_1 = 25$. Расстояние от вершины A до стороны AC равно 7, а до стороны AB равно 20. Найдите объем призмы.
2. Основанием наклонного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ служит квадрат со стороной, равной a . Боковые ребра тоже равны a , $\angle A_1 A D_1 = \angle A_1 A B = 90^\circ$. Двухгранный угол при ребре AA_1 равен 120° . Найдите объем параллелепипеда.

С—16

1. В основании пирамиды $MABC$ лежит правильный треугольник ABC со стороной, равной $\sqrt{3}$, $MA = 6$. Боковые грани имеют равные площади. Найдите объем пирамиды.
2. В треугольной пирамиде $MABC$ $MA = 4$, $MB = 6$, $MC = 5$. На ребрах MA , MB и MC выбраны точки A_1 , B_1 и C_1 так, что $MA_1 = 1$, $MB_1 = 2$ и $MC_1 = 2$. В каком отношении плоскость $A_1B_1C_1$ разделила объем пирамиды?

С—17

1. Через вершину конуса проведено сечение, имеющее наибольшую площадь. Плоскость этого сечения составляет с плоскостью основания угол $\arctg 2$. Высота конуса равна H . Найдите объем большей части конуса, отсеченной этой плоскостью.
2. Основанием пирамиды служит прямоугольник, стороны которого 12 и 4. Боковые ребра пирамиды равны 10. Боковая грань, проходящая через большую сторону прямоугольника, вписана в окружность основания конуса, а образующая конуса принадлежит высоте противоположной боковой грани, проведенной из вершины пирамиды. Найдите объем конуса.

С—18

1. Стороны оснований правильной четырехугольной усеченной пирамиды относятся как 1 : 2. Через центр нижнего основания и среднюю линию одной из боковых граней проведена плоскость. В каком отношении эта плоскость разделила объем пирамиды?
2. В равнобедренном треугольнике угол при вершине равен 120° , а основание равно a . Этот треугольник вращается вокруг оси, проходящей через точку пересечения высот треугольника и параллельной основанию этого треугольника. Найдите объем тела вращения.

С—19

1. Основанием пирамиды служит равносторонний треугольник со стороной 1. Основание K высоты пирамиды делит на расстоянии $\frac{2}{\sqrt{3}}$ от центра O этого треугольника, причем луч OK проходит через середину одной из его сторон. Найдите площадь поверхности шара, вписанного в пирамиду, если ее высота равна $\frac{2}{\sqrt{3}}$.
2. Полый металлический шар, внешний радиус которого R , плавает, будучи наполовину погруженным в воду. Плотность материала ρ . Найдите толщину стенок шара.

ДС

1. Основанием пирамиды $MABCD$ служит прямоугольник $ABCD$, где $AB = 2$, $AD = 1$. Грань AMB — равнобедренный треугольник ($AM = BM$), плоскость которого перпендикулярна плоскости основания. Высота пирамиды $MO = 1$. Используя метод координат, найдите угол между гранями AMD и DMC .
2. Найдите уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1; 1; 1)$ и перпендикулярной линии пересечения плоскостей $2x - y + z - 1 = 0$ и $x + y - 2z - 2 = 0$.

П-1

Вариант 1

В основании пирамиды $DABC$ лежит правильный треугольник ABC со стороной, равной a . Две боковые грани ADB и CDB перпендикулярны к плоскости основания. Их общее ребро тоже равно a .

1. Каково взаимное расположение прямых:
1) AB и CD ; 2) BD и AC ; 3) PQ и AC , где P и Q — середины ребер AB и CD соответственно?
Дайте обоснование.
2. Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через центр основания параллельно ребрам AC и BD . Определите вид сечения и найдите его площадь.
3. Найдите угол между гранями:
1) ADB и CDB ; 2) DAC и ABC .
4. Чему равен угол между ребром BD и гранью ADC ?
5. Найдите угол между AB и DC .
6. Чему равно расстояние между AB и DC ?

П-1

Вариант 2

Основанием прямой призмы $ABC A_1 B_1 C_1$ служит прямоугольный треугольник ABC ($\angle C = 90^\circ$), $AC = CB = a$. Боковые ребра тоже равны a .

1. Каково взаимное расположение прямых:
1) AA_1 и BC ; 2) A_1C_1 и BC ; 3) EF и AC , где $E \in AB_1$ ($AE : EB_1 = 1 : 2$) и $F \in CB_1$ ($CF : FB_1 = 2 : 1$)?
Дайте обоснование.
2. Постройте сечение призмы плоскостью, проходящей через AC и середину B_1C_1 . Определите вид сечения и найдите его площадь.
3. Найдите угол:
1) между плоскостью сечения и плоскостью основания;
2) между плоскостью сечения и плоскостью грани CC_1B_1B .
4. Чему равен угол между BC и плоскостью грани AA_1B_1B ?
5. Найдите угол между AB и BC_1 .
6. Чему равно расстояние между AB и B_1C_2 ?

П-1**Вариант 3**

Основанием пирамиды $MABCD$ служит квадрат $ABCD$ со стороной, равной a . Грань AMB является правильным треугольником и перпендикулярна плоскости основания.

1. Каково взаимное расположение прямых:
1) MB и AD ; 2) AC и MD ; 3) EF и PT , где E, F, T и P — середины ребер MA, MC, CD и AD соответственно? Дайте обоснование.
2. Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через середину AD параллельно грани AMB . Определите вид сечения и найдите его площадь.
3. Чему равен угол между плоскостями:
1) ABC и DMC ; 2) AMB и DMC ?
4. Чему равен угол между MD и плоскостью AMB ?
5. Чему равен угол между MD и AC ?
6. Найдите расстояние между BC и MD .

П-1**Вариант 4**

В тетраэдре $DABC$ грани ABC и DBC — правильные треугольники со стороной, равной a . Плоскости этих граней перпендикулярны.

1. Каково взаимное расположение прямых:
1) AC и DB ; 2) AD и BC ; 3) EF и BC , где E и F — середины ребер AC и BD соответственно? Дайте обоснование.
2. Через вершину A и середину M ребра DC проведите плоскость параллельно BC . Определите вид сечения и найдите его площадь.
3. Найдите угол между плоскостями:
1) ADC и ABC ; 2) ADC и ADB .
4. Найдите угол между медианой грани ADC , проведенной из вершины A , и плоскостью ABC .
5. Найдите угол между: 1) AD и BC ; 2) AB и DC .
6. Найдите расстояние между AD и BC .

П-2**Вариант 1**

В прямом параллелепипеде $ABDA'B'C'D'$ основанием служит ромб, диагональ которого $AC = 8$ и $BD = 6$. Через диагональ BD и середину ребра CC' проведена плоскость, составившая с плоскостью основания угол в 45° .

- 1) Найдите величину угла между двумя смежными параллельными ребрами?
- 2) Найдите площадь поверхности призма $AB'BDD'C'C$.
- 3) Чему равен угол между диагональю AC и плоскостью грани $DD'C'C$?

П-2**Вариант 2**

Основанием пирамиды $DABC$ служит равнобедренный прямоугольный треугольник ABC ($\angle C = 90^\circ$), $AC = CB$.

1. Боковые ребра наклонены к основанию под углом 60° .

1) На какие части делит объем пирамиды плоскость CEF , где F — середина BD , а точка E лежит на ребре AB , причем $AE : EB = 1 : 3$?

2) Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

3) Чему равен двугранный угол, образованный гранями ABC и DBC ?

П-2**Вариант 3**

Основанием наклонной призмы $ABC A_1 B_1 C_1$ служит равнобедренный треугольник со стороной, равной $4\sqrt{3}$. Вершина A_1 проектируется на середину стороны BC , боковые ребра составляют с плоскостью основания угол в 45° .

1) Найдите площадь боковой поверхности призмы.

2) Через сторону основания BC проведена плоскость, перпендикулярная грани $CC_1 B_1 B$. В каком отношении она разделила объем призмы?

3) Найдите расстояние от вершины B до боковой грани $AA_1 C C_1$.

П-2**Вариант 4**

В основании пирамиды $MABC$ лежит равнобедренный треугольник ABC , $AB = BC = 10$, $AC = 12$. Высота пирамиды равна 4. Боковые грани пирамиды равнонаклонены к основанию.

1) Через точки A , O и E , где E — середина MB , а O — основание высоты пирамиды MO , проведена плоскость. В каком отношении эта плоскость делит объем пирамиды?

2) Найдите площадь поверхности пирамиды.

3) Чему равен угол между MB и плоскостью грани AMC ?

П-3**Вариант 1**

Наибольший угол между образующими конуса равен 120° . Площадь осевого сечения равна $16\sqrt{3}$.

1) Найдите площадь боковой поверхности конуса.

2) Найдите центральный угол в развертке боковой поверхности конуса.

3) В данный конус вписан другой конус, основание которого параллельно основанию данного конуса и делит его высоту в отношении $1 : 2$, считая от вершины. Вершина вписанного конуса совпадает с центром основания данного. Найдите отношение объемов этих конусов.

4) Найдите площадь поверхности описанного около данного конуса шара.

П–3**Вариант 2**

В цилиндре, высота которого равна 8, через его образующую проведены две плоскости, угол между которыми 60° . Площадь сечения равна $32\sqrt{3}$.

- 1) Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.
- 2) Найдите острый угол между диагоналями развертки боковой поверхности цилиндра.
- 3) Выясните, можно ли в данный цилиндр вписать шар, и если да, то найдите отношение их объемов.
- 4) Найдите площадь поверхности описанного около этого цилиндра шара.

П–3**Вариант 3**

В усеченный конус вписан шар, диаметр которого равен $5\sqrt{3}$. Образующие конуса составляют с плоскостью основания угол в 60° .

- 1) Найдите площадь боковой поверхности конуса.
- 2) Найдите объем конуса.
- 3) Укажите размеры развертки боковой поверхности конуса (центральный угол развертки, радиусы concentрических окружностей).
- 4) Какова площадь поверхности описанного около этого конуса шара?

П–3**Вариант 4**

Цилиндр, осевое сечение которого квадрат, вписан в конус так, что окружность верхнего основания цилиндра касается боковой поверхности конуса, а нижнее основание лежит на основании конуса. Площадь боковой поверхности цилиндра равна 16 π , а образующая конуса составляет с плоскостью основания угол в 45° .

- 1) Найдите площадь боковой поверхности конуса.
- 2) Какова наибольшая возможная площадь сечения, проведенного через вершину конуса?
- 3) Найдите отношение объема конуса, отсеянного от данного конуса верхним основанием цилиндра, к объему цилиндра.
- 4) Найдите объем вписанного в конус шара.

П–4**Вариант 1**

1. В наклонной треугольной призме $ABC A_1 B_1 C_1$ все ребра равны a , $\angle A_1 AC' = \angle A_1 AB = 60^\circ$. Используя векторы:
1) найдите угол между $A_1 C'$ и медианой AK основания;
2) докажите, что грань $CC_1 B_1 B$ — прямоугольник.
2. Призма $ABC A_1 B_1 C_1$ задана координатами своих вершин $A(1; 2; 2)$, $B(-1; -1; 2)$, $C(3; -2; 2)$, $A_1(1; 2; 5)$. Найдите угол между прямой AE , где E — середина $A_1 C_1$, и высотой, которая перпендикулярна диагонали грани BCC_1 .

П–4**Вариант 2**

1. В тетраэдре $MABC$ основанием служит правильный треугольник ABC со стороной a , $AM = 2a$, $\angle MAC = \angle MAB = 45^\circ$. Используя векторы:
1) докажите, что $AM \perp CB$;
2) найдите расстояние между серединами ребер AC и BM .
2. Пирамида $MABCD$ задана координатами своих вершин $M(-1; 2; 5)$, $A(1; -1; 2)$, $B(-2; 1; 2)$, $C(-1; 3; 2)$, $D(3; 1; 2)$. Найдите объем пирамиды.

П–4**Вариант 3**

1. В прямом параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ основанием служит ромб $ABCD$ со стороной a и углом A , равным 60° . Боковые ребра тоже равны a . Используя векторы:
1) найдите угол между AE и BD , где E — центр симметрии грани $DD_1 C_1 C$;
2) докажите, что $AC \perp BD$.
2. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, используя метод координат, найдите угол между FE , где F — середина DC , а E — середина $B_1 C_1$, и плоскостью $A_1 BD$.

П–4**Вариант 4**

1. В правильном тетраэдре $DABC$ ребра равны a , M — точка пересечения медиан грани BDC , а E — середина ребра AD . Используя векторы:
1) найдите расстояние EM ;
2) докажите, что $PK \perp AD$, где P и K — соответственно середины ребер DC и DB .
2. Основанием пирамиды $MABCD$ служит прямоугольник $ABCD$, где $AB = 2$ и $AD = 1$. Грань AMB — равнобедренный треугольник, плоскость которого перпендикулярна основанию пирамиды. Высота пирамиды равна 1. Используя метод координат, найдите угол между AF и DE , где F — середина MD , а E — середина MC .

МД—1

Вариант 1

1. Дана точка $M(1; 3; 2)$. Найдите координаты точки M_1 — проекции точки M на плоскость Oxz и координаты точки M_2 — проекции точки M на ось Oz .
2. Даны точки $E(-1; 2; 3)$ и $F(1; -1; 4)$. Разложите вектор $\vec{EF}$ по векторам $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$.
3. Найдите угол между векторами $\vec{j}$ и $\vec{m} = 2\vec{i} - 3\vec{k}$.
4. В параллелепипеде $ABCD_1B_1C_1D_1$ вершины $A(1; 2; -4)$ и $C_1(3; 0; 2)$. Найдите координаты точки пересечения его диагоналей.
5. Даны точки A , B и C , причем $\vec{AB} = (2; 4; 3)$ и $\vec{AC} = (1; -8; -6)$. Лежат ли эти точки на одной прямой?
6. Дан вектор $\vec{m} = (1; 2; 2)$. Найдите координаты единичного вектора $\vec{e}$, сонаправленного с вектором $\vec{m}$.
7. Вектор $\vec{a}$ составляет с положительным направлением оси Ox угол в 135° . Найдите абсциссу вектора $\vec{a}$, если $|\vec{a}| = 2$.
8. $DABC$ — правильный тетраэдр. Упростите выражение $(\vec{AB} + \vec{BC})(\vec{AB} - \vec{BC}) + \vec{AD}(\vec{AC} - \vec{AB})$.
9. Дано: $\vec{a} = (1; -2; 3)$, $\vec{b} = (2; -1; 4)$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 120$. Найдите $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{a}$.
10. В треугольнике ABC $A(0; 0; 0)$, $B(1; 2; 1)$, $C(1; -1; 1)$. Найдите координаты центра описанной около треугольника окружности.

МД—1

Вариант 2

1. Дана точка $E(2; -1; 5)$. Найдите координаты точки E_1 — проекции точки E на плоскость Oyz и координаты точки E_2 — проекции точки E на ось Oy .
2. Даны точки $K(2; -1; 3)$ и $M(1; -2; 1)$. Разложите вектор $\vec{KM}$ по векторам $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$.
3. Найдите угол между векторами $\vec{j}$ и $\vec{n} = 2\vec{j} + \vec{k}$.
4. В параллелепипеде $ABCD_1B_1C_1D_1$ с вершиной $B(-1; 3; 2)$ точка пересечения диагоналей $M(2; -1; 1)$. Найдите координаты вершины D .

- Даны точки E , F и K , причем $\vec{EF} = (1; 2; 3)$ и $\vec{EK} = (2; 4; 6)$. Лежат ли эти точки на одной прямой?
- Дан вектор $\vec{p} = (2; -2; 1)$. Найдите координаты единичного вектора $\vec{e}$, противоположно направленного вектору $\vec{p}$.
- Вектор $\vec{a}$ составляет с положительным направлением оси Oy угол в 135° . Найдите ординату вектора $\vec{a}$, если $|\vec{a}| = 2\sqrt{3}$.
- В пирамиде $HPMKE$ все ребра равны. Упростите выражение $(\vec{PH} - \vec{MK})(\vec{PH} + \vec{MK}) + \vec{HK}(\vec{MK} + \vec{KE})$.
- Даны векторы $\vec{m}$ и $\vec{n}$: $|\vec{m}| = 2$, $|\vec{n}| = \sqrt{2}$, $\angle \vec{m}, \vec{n} = 135^\circ$. Найдите $(\vec{m} - \vec{n}) \cdot \vec{n}$.
- В треугольнике MFP $M(0; 0; 0)$, $F(2; 1; 3)$, $P(-1; 1; 1)$. Найдите диаметр окружности, описанной около этого треугольника.

МД—2

Вариант 1

- Сечение, параллельное оси цилиндра, отстоит от его оси на расстояние, равное 3. Найдите площадь сечения, если радиус основания цилиндра равен 5, а его высота 10.
- Основанием прямой призмы служит треугольник со сторонами 6, 8 и 10. Высота призмы равна 4. Площадь боковой поверхности описанного около призмы цилиндра равна
- Через вершину конуса проведена плоскость, пересекающая основание по хорде, длина которой равна a . Эта хорда стягивает дугу в 90° . Угол между образующими в сечении равен 60° . Площадь боковой поверхности конуса равна
- Основанием пирамиды служит треугольник со стороной, равной 10, и противолежащим ей углом в 30° . Боковые ребра пирамиды наклонены к основанию под углом 60° . Площадь боковой поверхности описанного около пирамиды конуса равна
- Найдите множество точек, удаленных на a от точки M и на b от точки P .
- Укажите множество центров всех сфер, которые касаются плоскости в заданной точке.
- Через точку $A(3; 4; 12)$, принадлежащую сфере, заданной уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = 169$, проведена плоскость, перпендикулярная оси Oz . Найдите радиус сечения.

8. Радиусы оснований усеченного конуса равны 2 и 4. В этот конус вписан шар. Площадь боковой поверхности конуса равна
9. Сторона основания правильной трехугольной пирамиды равна 3. Боковые ребра наклонены к основанию под углом 45° . Площадь описанной около пирамиды сферы равна
10. В пирамиду с равнонаклоненными к основанию гранями вписан шар. Центр шара делит высоту в отношении $2 : 1$, считая от вершины. Угол наклона боковых граней к основанию равен

МД—2

Вариант 2

1. В цилиндре проведено сечение, параллельное его оси. Диагональ сечения равна 16 и составляет угол в 60° с плоскостью основания. Радиус основания цилиндра равен 5. Найдите расстояние от оси цилиндра до плоскости сечения.
2. Основанием прямого параллелепипеда служит ромб со стороной, равной 4, и углом в 60° . Высота параллелепипеда равна 5. Площадь боковой поверхности вписанного в параллелепипед цилиндра равна
3. Через вершину конуса проведена плоскость, пересекающая основание по хорде, длина которой равна m . Эта хорда стягивает дугу в 60° . Угол между образующими к сечению прямой. Площадь боковой поверхности конуса равна
4. В правильную трехугольную пирамиду вписан конус, сторона основания пирамиды равна 6, а ее высота 4. Площадь боковой поверхности конуса равна
5. Найдите множество точек, из которых данный отрезок виден под прямым углом.
6. Укажите множество центров всех шаров данного радиуса, которые касаются данной плоскости.
7. Через точку $B(3; 4; 12)$, принадлежащую сфере, заданной уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = 169$, проведена плоскость, перпендикулярная оси Ox . Найдите радиус сечения.
8. Образующая усеченного конуса равна 6. В этот конус вписан шар. Площадь боковой поверхности конуса равна
9. В правильной четырехугольной пирамиде боковые ребра наклонены к основанию под углом 45° . Площадь описанной около пирамиды сферы равна 64 π . Сторона основания пирамиды равна

10. Боковые грани пирамиды наклонены к основанию под углом 45° . В эту пирамиду вписан шар. В каком отношении, считая от вершины, центр этого шара делит высоту пирамиды?

МД—3

Вариант 1

1. Основанием правильной четырехугольной призмы служит квадрат, диагональ которого равна d . Через диагональ основания и противолежащую вершину верхнего основания проведена плоскость под углом 45° к нему. Объем призмы равен ...
2. В наклонной треугольной призме площади двух граней равны 30 и 40. Угол между ними прямой. Боковое ребро равно 10. Найдите объем призмы.
3. Объем наклонной треугольной призмы равен V . Через среднюю линию основания и середину бокового ребра, проходящего через вершину основания, противолежащую средней линии, проведена плоскость. Найдите объем отсеченной треугольной пирамиды.
4. Основанием пирамиды служит прямоугольный треугольник, катеты которого равны 3 и 4. Боковые грани наклонены к основанию под углом 45° . Объем пирамиды равен ...
5. Площадь боковой поверхности правильной четырехугольной пирамиды равна S , а расстояние от центра основания до боковых граней d . Найдите объем пирамиды.
6. Объем пирамиды равен V . Боковое ребро пирамиды разделено на три равные части и через точки деления проведена плоскость, параллельная основанию. Объем усеченной пирамиды, заключенной между параллельными плоскостями, равен ...
7. Через середину образующей конуса проведена плоскость параллельно плоскости основания. Полученное сечение служит верхним основанием цилиндра, нижнее основание которого лежит на основании конуса. Объем конуса равен 40. Чему равен объем цилиндра?
8. Боковые ребра пирамиды наклонены к основанию под углом 45° . Основанием пирамиды служит треугольник со стороной, равной 10, и противолежащим углом в 30° . Чему равен объем описанного около пирамиды конуса?
9. В правильную треугольную призму, сторона основания которой равна 2×3 , вписан шар. Найдите объем шара.

10. Плоскость, перпендикулярная диаметру шара, делит этот диаметр на две части, равные 3 и 9. Найдите объем меньшей из этих частей.

МД—3

Вариант 2

1. В правильной треугольной призме сторона основания равна a . Через сторону основания и противолежащую вершину верхнего основания проведена плоскость под углом 45° к основанию. Чему равен объем призмы?
2. В наклонной треугольной призме две боковые грани взаимно перпендикулярны, их площади равны 20 и 30. Боковые ребра равны 5. Найдите объем призмы.
3. В наклонном параллелепипеде через диагональ основания и середину противолежащего бокового ребра проведена плоскость. Объем параллелепипеда равен V . Чему равен объем отсеченной треугольной пирамиды?
4. Основанием пирамиды служит ромб с углом в 30° и стороной, равной a . Боковые грани пирамиды наклонены к основанию под углом 60° . Найдите объем пирамиды.
5. Объем правильной треугольной пирамиды равен V , а площадь ее боковой поверхности S . Найдите расстояние от центра основания до боковых граней.
6. Боковые ребра пирамиды разделены на три части в отношении $1:2:1$. Через точки деления проведены плоскости, параллельные основанию. Найдите отношение объема усеченной пирамиды, заданной между параллельными плоскостями, к объему отсеченной пирамиды.
7. Через середину образующей конуса проведена плоскость, параллельно плоскости основания. Полученное сечение служит верхним основанием цилиндра, нижнее основание которого лежит на основании конуса. Объем цилиндра равен 9. Найдите объем конуса.
8. Основанием пирамиды служит треугольник со сторонами 6, 8 и 10. Боковые ребра пирамиды наклонены к основанию под углом 60° . Объем описанного около пирамиды конуса равен
9. Основанием прямого параллелепипеда служит ромб со стороной, равной $4\sqrt{3}$, и углом в 60° . Высота параллелепипеда равна 12. Чему равен его объем?
10. В круглом секторе радиус равен 6, а угол 60° . Один его тор касается и вогнут, и выпуклый, соприкасаясь один из ограничивающих его радиусов. Найдите объем тела вращения.

К—1

Вариант 1

- Какой угол образуют единичные векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если известно, что векторы $\vec{a} + 2\vec{b}$ и $5\vec{a} - 4\vec{b}$ взаимно перпендикулярны?
- В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ длина ребра равна 1. M — центр грани $DD_1 C_1 C$. Используя метод координат, найдите: 1) угол между прямыми AM и $B_1 D$; 2) расстояние между серединами отрезков AM и $B_1 D$.
- Даны две точки: A , лежащая на оси ординат, и $B(1; 0; 1)$. Прямая AB составляет с плоскостью Oxz угол в 30° . Найдите координаты точки A .
- Найдите координаты вектора $\vec{a}$, коллинеарного вектору $\vec{b}(6; 5; -7,5)$ и образующего тупой угол с координатным вектором $\vec{j}$, если $|\vec{a}| = 50$.

К—1

Вариант 2

- Даны точки $A(-1; 2; 1)$, $B(2; 0; 1)$, $C(2; -1; 0)$ и $D(2; 1; 2)$. Найдите:
 - угол между векторами $\vec{AB}$ и $\vec{CD}$;
 - расстояние между серединами отрезков AB и CD .
- Основанием прямой призмы $ABCA_1 B_1 C_1$ служит равнобедренный треугольник ABC , $\angle ACB = 120^\circ$, $AC = CB = BB_1$. Используя векторы, найдите угол между прямыми AB и CB_1 .
- Даны две точки: A , лежащая в плоскости xOy , и $B(1; 1; 1)$, причем абсцисса точки A равна ее ординате. Прямая AB составляет с плоскостью zOy угол в 30° . Найдите координаты точки A .
- Даны векторы $\vec{a}(7; 0; 0)$ и $\vec{b}(0; 0; 3)$. Найдите множество точек M , для каждой из которых выполняются условия $\vec{OM} \cdot \vec{a} = 0$ и $\vec{OM} \cdot \vec{b} = 0$, где O — начало координат.

К—1**Вариант 3**

1. Дано: $\vec{a} = 2$, $\vec{b} = \sqrt{2}$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 135$. Найдите $\vec{a} \cdot 2\vec{b}$.
2. В кубе $AB_1C_1D_1A_1B_1C_1D_1$ длина ребра равна 1, M — середина ребра A_1D_1 . Используя метод координат, найдите:
 - 1) угол между прямыми A_1C и C_1M ;
 - 2) расстояние между серединами отрезков A_1C и C_1M .
3. Даны две точки: A , лежащая на оси абсцисс, и $B(2; 2; 0)$. Прямая AB составляет с плоскостью xOy угол в 60° . Найдите координаты точки A .
4. Вектор $\vec{b}$, коллинеарный вектору $\vec{a} = \{8; -10; 13\}$, составляет с положительным направлением оси Oz острый угол. $|\vec{b}| = \sqrt{37}$. Найдите координаты вектора $\vec{b}$.

К—1**Вариант 4**

1. Даны точки $E(1; -2; 2)$, $F(3; 0; 2)$, $K(0; -2; 3)$, $T(2; 4; 1)$. Найдите:
 - 1) угол между векторами $\vec{EF}$ и $\vec{KT}$;
 - 2) расстояние между серединами отрезков EF и KT .
2. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ все ребра равны между собой. Используя векторы, найдите угол между прямыми A_1C и AB .
3. Даны две точки: M , лежащая в плоскости xOz , и $P(1; 2; 1)$, причем абсцисса точки M равна ее аппликате. Прямая PM составляет с плоскостью xOy угол в 30° . Найдите координаты точки M .
4. Даны векторы $\vec{c} = \{0; -2; 0\}$ и $\vec{b} = \{0; 0; 5\}$. Найдите множество точек E , для каждой из которых выполнено условие $OE \cdot \vec{b} = 0$ и $OE \cdot \vec{c} = 0$, где O — начало координат.

К—2**Вариант 1**

1. Прямоугольная трапеция с углом в 45° вращается вокруг прямой, содержащей большее основание. Найдите площадь поверхности тела вращения, если основания трапеции равны 3 и 5.
2. В шар радиуса R вписан конус, у которого образующая составляет с плоскостью основания угол φ .
 - 1) Найдите площадь боковой поверхности конуса.
 - 2) Если $\varphi = 30^\circ$, то найдите наибольшую возможную площадь сечения, проходящего через вершину конуса.
3. Сфера, заданная уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, пересекает ось координат в точках A , B и C ; A — точка пересечения с осью Ox , B — с осью Oy , а C — с осью Oz (координаты этих точек положительны). Найдите угол между плоскостью ABC и плоскостью $z = 0$.

К—2**Вариант 2**

1. В цилиндре проведена плоскость, параллельная оси и отсекающая от окружности основания дугу в 90° . Диаметр сечения равен 10 и удалена от оси на расстояние, равное 4. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.
2. В правильной треугольной пирамиде боковые грани наклонены к основанию под углом 60° . В эту пирамиду вписан шар радиуса R .
 - 1) Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.
 - 2) Найдите длину окружности, по которой поверхность шара касается боковых граней пирамиды.
- 3*. Из точки $M(-7; 3; -4)$ проведена касательная к сфере, заданной уравнением $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 27 = 0$. Найдите длину касательной от точки M до точки касания.

К—2**Вариант 3**

1. Ромб $ABCD$ со стороной a и углом A , равным 60° , вращается вокруг прямой, проходящей через вершину C и перпендикулярной диагонали AC . Найдите площадь поверхности тела вращения.
2. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a , а боковые ребра наклонены к основанию под углом α .
 - 1) Найдите площадь описанной около пирамиды сферы.
 - 2) Если $\alpha = 30^\circ$, то найдите угол между радиусом сферы, проведенным в одну из вершин основания, и плоскостью основания.
- 3*. Сфера, заданная уравнением $(x - 1)^2 + y^2 + z^2 = 5$, пересекает ось ординат в точке $A(y = 0)$. Через точку $M(1; 1; 0)$ проведена прямая, параллельная оси Oz и пересекающая сферу в точке $B(z > 0)$. Найдите угол между прямой AB и плоскостью xOy .

К—2**Вариант 4 (начало)**

1. Через вершину конуса проведена плоскость, пересекающая основание по хорде длиной 3, которая стягивает дугу в 120° . Плоскость сечения составляет с плоскостью основания угол в 45° . Найдите площадь боковой поверхности конуса.

К—2**Вариант 4 (продолжение)**

2. В правильную четырехугольную пирамиду вписан шар. Расстояние от центра шара до вершины пирамиды равно a . Боковые грани наклонены к основанию под углом 60° .
- 1) Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.
2) Найдите площадь круга, ограниченного окружностью, по которой сфера касается боковой поверхности пирамиды.
- 3%. Через точку $M(4; 2; 8)$ проведена плоскость, которая параллельна оси Oz и составляет с плоскостями xOz и zOy угол в 45° . Найдите длину окружности, по которой сфера, заданная уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = 25$, пересекает эту плоскость.

К—3**Вариант 1**

1. В правильной треугольной пирамиде боковые грани наклонены к основанию под углом 60° . Расстояние от центра основания до боковой грани равно $2\sqrt{3}$. Найдите объем пирамиды.
2. В цилиндре проведена плоскость, параллельная его оси, которая отсекает от окружности основания дугу 2α . Диагональ полученного сечения составляет с осью цилиндра угол φ и удалена от нее на расстояние, равное d . Найдите объем цилиндра.
- 3%. В пирамиду, данную в задаче 1, вписан шар, касающийся боковой поверхности пирамиды по некоторой окружности. Плоскость, которой принадлежит эта окружность, делит шар на две части. Найдите объем меньшей из этих частей.

К—3**Вариант 2**

1. В правильной четырехугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ через концы трех ребер, исходящих из вершины C , проведена плоскость на расстоянии $1\sqrt{2}$ от этой вершины, составляющая с плоскостью основания угол в 45° . Найдите объем призмы.
2. В конусе через его вершину под углом φ к плоскости основания проведена плоскость, отсекающая от окружности основания дугу 2α . Радиус основания конуса равен R . Найдите объем конуса.
- 3%. В призме, данной в задаче 1, проведена плоскость, перпендикулярная диагонали призмы и делящая ее в отношении $1 : 3$. Указанная плоскость делит описанный около призмы шар на две части. Найдите объем меньшей из этих частей.

К—3**Вариант 3**

1. В правильной четырехугольной пирамиде боковые грани наклонены к основанию под углом в 60° . Расстояние от середины высоты пирамиды до боковой грани равно 2. Найдите объем пирамиды.
2. В цилиндре проведена плоскость, параллельная его оси, которая отсекает от окружности основания дугу φ . Диагональ полученного сечения равна $2m$ и удалена от оси цилиндра на расстояние, равное m . Найдите объем цилиндра.
- 3*. В пирамиду, данную в задаче 1, вписан шар, касающийся боковой поверхности пирамиды по некоторой окружности. Плоскость, которой принадлежит эта окружность, делит шар на две части. Найдите объем меньшей из этих частей.

К—3**Вариант 4**

1. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ через сторону нижнего основания BC и противоположающую вершину A_1 проведена плоскость под углом в 45° к плоскости основания. Расстояние от этой плоскости до вершины A равно 2. Найдите объем призмы.
2. В конусе через его вершину под углом φ к плоскости основания проведена плоскость, отсекающая от окружности основания дугу α . Высота конуса равна h . Найдите объем конуса.
- 3*. Вокруг призмы, данной в задаче 1, описан шар. Найдите объем меньшей части шара, которая отсекается от него плоскостью боковой грани.

К—4**Вариант 1**

В правильной четырехугольной пирамиде $MABCD$ сторона основания равна 6, а боковое ребро 5. Найдите:

- 1) площадь боковой поверхности пирамиды;
- 2) объем пирамиды;
- 3) угол наклона боковой грани к плоскости основания;
- 4) скалярное произведение векторов $(\vec{AD} \times \vec{AB}) \cdot \vec{AM}$;
- 5) площадь описанной около пирамиды сферы;
- 6*) угол между BD и плоскостью DMC .

К—4**Вариант 2**

В правильной треугольной пирамиде $MABC$ сторона основания равна $4\sqrt{2}$, а боковое ребро 5. Найдите:

- 1) площадь боковой поверхности пирамиды;
- 2) объем пирамиды;
- 3) угол между боковым ребром и плоскостью основания;
- 4) скалярное произведение векторов $\frac{1}{2}(\vec{MB} + \vec{MC}) \vec{EA}$, где E — середина BC ;
- 5) объем вписанного в пирамиду шара;
- 6*) угол между стороной основания и плоскостью боковой грани.

К—4**Вариант 3**

В правильной четырехугольной пирамиде $MABCD$ боковое ребро равно 8 и наклонено к плоскости основания под углом в 60° . Найдите:

- 1) площадь боковой поверхности пирамиды;
- 2) объем пирамиды;
- 3) угол между противоположными боковыми гранями;
- 4) скалярное произведение векторов $\frac{1}{2}(\vec{MA} + \vec{MC}) \vec{ME}$, где E — середина DC ;
- 5) объем описанного около пирамиды шара;
- 6*) угол между боковым ребром AM и плоскостью DMC .

К—4**Вариант 4**

В правильной треугольной пирамиде $MABC$ сторона основания равна $2\sqrt{3}$, а боковые грани наклонены к основанию под углом 60° . Найдите:

- 1) площадь боковой поверхности пирамиды;
- 2) объем пирамиды;
- 3) угол между боковым ребром и плоскостью основания;
- 4) скалярное произведение векторов $\frac{1}{2}(\vec{MC} + \vec{MB}) \vec{OM}$, где O — основание высоты пирамиды;
- 5) площадь вписанной в пирамиду сферы;
- 6*) угол между ME , где E — середина BC , и плоскостью AMC .

Самостоятельные работы

С—1

Вар. 1. 1. 1) $B(-2; -2; 0)$, $D(2; 2; 0)$, $C(-3; 2; 0)$, $A(-2; -2; 4)$, $B_1(-2; -2; 4)$, $D_1(2; 2; 4)$, $C_1(-2; 2; 4)$.

2) $\vec{OD}(2; 2; 0)$, $\vec{OC_1}(-2; 2; 4)$, $\vec{OM}(0; 2; 2)$, $\vec{OD} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + 0\vec{k}$, $\vec{OC_1} = -2\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}$, $\vec{OM} = 0\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$.

2. Да, будут.

Вар. 2. 1. 1) $A(2; 0; 0)$, $B(-2; 0; 0)$, $D(2; 4; 0)$, $A_1(2; 0; 4)$, $B_1(-2; 0; 4)$, $C_1(-2; 4; 4)$, $D_1(2; 4; 4)$.

2) $\vec{OC}(-2; 4; 0)$, $\vec{OB_1}(-2; 0; 4)$, $\vec{OK}(-2; 2; 2)$, $\vec{OC} = -2\vec{i} + 4\vec{j} + 0\vec{k}$, $\vec{OB_1} = -2\vec{i} + 0\vec{j} + 4\vec{k}$, $\vec{OK} = -2\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$.

2. Да, будут.

Вар. 3. 1. 1) $C(0; 0; 0)$, $B(-5; 0; 0)$, $A(0; -5\sqrt{3}; 0)$, $D(-5; 0; 5\sqrt{3})$.

2) $\vec{CM} \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{CM} = \frac{10}{3}\vec{i} + \frac{5\sqrt{3}}{3}\vec{j} + \frac{5\sqrt{3}}{3}\vec{k}$.

2. Да, лежит.

Вар. 4. 1. 1) $A(0; 0; 0)$, $C(0; 4; 0)$, $B(-4\sqrt{3}; 4; 0)$, $D(-4\sqrt{3}; 4; 12)$.

2) $\vec{AK} \begin{pmatrix} 8\sqrt{3} \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{AK} = \frac{8\sqrt{3}}{3}\vec{i} + 4\vec{j} + 4\vec{k}$.

2. $m = 6$, $n = 2$.

Вар. 5. 1. Из точки O опускаем перпендикуляр OE на AC и точку E соединяем с точкой D . Тогда $\vec{DEO} = 15^\circ$, $OE = OD = 12$, $D(0; 0; 12)$. В треугольнике DOE опускаем перпендикуляр OK на DE . Легко доказать, что $OK \perp ADC$; $\vec{OK} = \frac{1}{2}(\vec{OE} + \vec{OD})$, где K — середина ED ($OE = OD$). Для решения задачи необходимо найти координаты точки E . Строим $EF \perp OC$, из подобия треугольников OFE и AOC находим $EF = \frac{36}{5}$ и $OF = \frac{48}{5}$. Тогда

$E \begin{pmatrix} 48 \\ 5 \end{pmatrix}$, $E \begin{pmatrix} 48 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{36}{5}\vec{i} + 0\vec{j}$. Дальнейшее решение очевидно.

Ответ. 1) $A(0; -20; 0)$, $B(-15; 0; 0)$, $C(15; 0; 0)$, $D(0; 0; 12)$.

2) $\vec{OK}(4,8; 3,6; 6)$, $\vec{OK} = 4,8\vec{i} + 3,6\vec{j} + 6\vec{k}$.

2. При $m = 3$. В этом случае $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ и векторы коллинеарны.

Вар. 6. 1. 1) $A \left(\frac{1}{\sqrt{3}}; -1; 0 \right)$, $C \left(\frac{1}{\sqrt{3}}; 1; 0 \right)$, $B \left(\frac{2}{\sqrt{3}}; 0; 0 \right)$, $D(0; 0; 1)$.

2) Так как $OA = \frac{2}{\sqrt{3}}$, а $OD = 1$, то $\frac{AK}{KD} = \frac{AO}{DO} = \frac{1}{3}$. Тогда $OK = \frac{1}{4}OD = \frac{3}{4}OA$. Дальнейшее решение очевидно.

Ответ. $OK \left(\frac{3}{4\sqrt{3}}; \frac{3}{4}; \frac{1}{4} \right)$, $OK = \frac{3}{4\sqrt{3}}; \frac{3}{4}; \frac{1}{4}$.

2. При $y = 6$. Тогда $\vec{p} = 2\vec{m} + 2\vec{n}$ и векторы коллинеарны.

Вар. 7. 1. Поместим призму в прямоугольную систему координат так, чтобы точка B была началом координат, а оси Ox , Oy и Oz были сонаправлены с лучами BA , BC и BB_1 соответственно. Пусть боковые ребра призмы и катеты основания равны 1. Тогда

$F \left(1; 0; \frac{1}{2} \right)$, $M \left(\frac{1}{2}; 0; 1 \right)$, $E \left(0; \frac{1}{6}; 1 \right)$ и $K \left(0; \frac{1}{2}; 0 \right)$. Необходимо

установить, коллинеарны ли векторы $\vec{EK}$, $\vec{EM}$ и $\vec{EF}$. Так как $\vec{EM} = \vec{BM} - \vec{BE}$, $\vec{BM} \left(\frac{1}{2}; 0; 1 \right)$, $\vec{BE} \left(0; \frac{1}{6}; 1 \right)$, то $\vec{EM} \left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{6}; 0 \right)$.

Аналогично получим, что $\vec{EF} \left(1; -\frac{1}{6}; \frac{1}{2} \right)$ и $\vec{EK} \left(0; \frac{1}{3}; -1 \right)$. Если указанные векторы коллинеарны, то должны существовать такие λ

$$\text{и } \mu, \text{ что } \vec{EK} = \lambda \vec{EM} + \mu \vec{EF}. \text{ Тогда получим систему } \begin{cases} \frac{1}{2}\lambda + \mu = 0 \\ \frac{1}{6}\lambda - \frac{1}{6}\mu = \frac{1}{3} \\ -\lambda + \frac{1}{2}\mu = -1. \end{cases}$$

Она имеет решение $\lambda = 4$ и $\mu = 2$. Значит, $\vec{EK} = 4\vec{EM} + 2\vec{EF}$. Тем самым доказывается, что указанные точки лежат в одной плоскости.

2. $\vec{a} = x\vec{p} + y\vec{q} + z\vec{m}$, $x\vec{p}(x; -2x; x)$, $y\vec{q}(2y; 0; -y)$, $z\vec{m}(z; z; 2z)$, $\vec{a}(x + 2y - z; -2x + z; x - y + 2z)$.

Так как разложение по базису единственное, то $x + 2y - z = 1$

$$-2x + z = 2$$

$$x - 2y + 2z = 2. \text{ Отсюда } x = 1, y = 1, z = 0.$$

Ответ. $\vec{a} = \vec{p} + \vec{q} + 0 \cdot \vec{m}$.

Вар. 8. 1. Задача решается аналогично задаче 1 из варианта 7. Если куб с ребром, равным 1, поместить в прямоугольную систему координат так, чтобы начало координат было в точке B , а оси Ox , Oy и Oz были сонаправлены с лучами BA , BC и BB_1 .

соответственно, то можно получить, что $P\vec{K} = 2P\vec{F} = 2P\vec{M}$. Таким образом, что указанные точки лежат в одной плоскости.

2. $\vec{m} = \frac{2}{5}\vec{a} + \frac{3}{5}\vec{k} + \frac{3}{5}\vec{c}$. Задача решается аналогично задаче 2 из варианта 7.

C—2

Вар. 1. 1. $\sqrt{34}$; $\sqrt{6} + 2\sqrt{14}$.

2. 1) $C(3; 0; -1)$; 2) $BC = 3$; 3) $BC = \vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$.

Вар. 2. 1. $\sqrt{42}$; $2\sqrt{6} - \sqrt{14}$.

2. 1) $C(-1; 0; 1)$; $D(2; 2; 0)$; 2) $BC = \sqrt{3}$, $AD = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$.

Вар. 3. 1. 9; 2. $\vec{a} + 8\vec{c}$; 8; 4).

Вар. 4. 1. $\sqrt{10}$; 2. $\vec{m} = 3\vec{i} - 6\vec{j} - 3\vec{k}$.

Вар. 5. 1. Поместим призму в прямоугольную систему координат так, чтобы начало координат совпадало с точкой B , а оси Ox , Oy и Oz были сонаправлены с лучами BA , BC и BB_1 соответственно. При решении учесть, что P — точка пересечения медиан

$$BC_1C \text{ и } MP, \quad \frac{1}{3}(\vec{MC}_1 + \vec{MC} + \vec{MD}). \text{ Ответ. } \frac{\sqrt{53}}{6}.$$

2. $\vec{AM} = k\vec{AB}$, так как точка M лежит на прямой AB . Пусть координаты точки $M(x; y; z)$. Тогда $\vec{AM} = (x - 1; y - 2; z - 1)$. С другой стороны, $\vec{AM} = (3k; k; 2k)$, $\vec{AM} = \sqrt{2k^2 + k^2 + 4k^2} = k\sqrt{14}$. По условию $\vec{AM} = 3\sqrt{14}$. Тогда $k = 3$. Так как

$$\begin{cases} x - 1 = 3k \\ y - 2 = k \\ z - 1 = 2k \end{cases} \quad \begin{cases} x = 8 \\ y = 1 \\ z = 5 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x = 10 \\ y = 5 \\ z = 7 \end{cases} \quad \text{Ответ. } M(8; 1; 5) \text{ или } M(10; 5; 7).$$

Вар. 6. 1. $\frac{89}{3}$.

2. $P(-16; 7; -3)$. Решается аналогично задаче из варианта 5.

Вар. 7. 1. Поместим тетраэдр в прямоугольную систему координат так, чтобы начало координат совпадало с точкой E . Пусть ось Ox противоположно направлена лучу EB , ось Oy сонаправлена с лучом EC , а ось Oz сонаправлена с лучом BD . Пусть $P(x; y; z)$. В выбранной системе координат $A(0; 2; 0)$, $B(-4; 0; 0)$, $C(0; 2; 0)$, $D(-1; 0; 4)$. Так как P равноудалена от всех вершин тетраэдра, то

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + (y - 2)^2 + z^2} &= \sqrt{x^2 + (y - 2)^2 + z^2} \\ \sqrt{(x + 4)^2 + y^2 + z^2} &= \sqrt{(x + 4)^2 + y^2 + (z - 4)^2}, \end{aligned}$$

откуда $x = \frac{3}{2}$, $y = 0$ и $z = 2$; $P \left(\frac{3}{2}; 0; 2 \right)$;

$$AP = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 4 + 4} = \sqrt{21}.$$

2. $\sqrt{(x-1)^2 + y^2 + z^2}$ — есть расстояние между точками $M(x; y; z)$ и $A(1; 0; 0)$, а $\sqrt{x^2 + (y-1)^2 + z^2}$ — между точками $M(x; y; z)$ и $B(0; 1; 0)$. Так как $AB = \sqrt{2}$, то $MA + MB \geq \sqrt{2}$, а по условию $MA + MB = 1$. Следовательно, уравнение не имеет решения.

Var. 8. 1. 3.

2. Решением уравнения служат координаты всех точек отрезка AB , где $A(0; 0; 1)$ и $B(1; 0; 0)$. Задача решается аналогично задаче из варианта 7.

C—3

Var. 1. 1. 1) $\frac{a^2}{2}$; 2) 0. 2. Острый.

Var. 2. 1. 1) a^2 ; 2) 0. 2. Тупой.

Var. 3. 1. 1) $\frac{3a^2}{2}$; 2) 0. 2. $180^\circ - \arccos \frac{5}{13}$.

Var. 4. 1. 1) $\frac{3a^2}{4}$; 2) 0. 2. $\arccos \frac{3}{5}$.

Var. 5. 1. Пусть вектор $\vec{a}(x; y; z)$ составляет с вектором $\vec{i}$ угол α , с вектором $\vec{j}$ — угол β , а с вектором $\vec{k}$ — угол γ . Имеем

$$\cos \alpha = \frac{x}{a}, \cos \beta = \frac{y}{a}, \cos \gamma = \frac{z}{a}.$$

Тогда $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{a^2} = 1$.

По условию $\alpha = 120^\circ$, $\gamma = 135^\circ$ и, значит,

$$1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cos^2 \beta + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1.$$

Отсюда $\cos \beta = \pm \frac{1}{2}$. Ответ. 60° или 120° .

2. $\frac{3\sqrt{2}}{5}$. Необходимо куб поместить в прямоугольную систему координат и найти синус одного из углов треугольника.

Var. 6. 1. 45° или 135° .

2. $\frac{\sqrt{21}}{8}$. См. указания к задачам из варианта 5.

Вар. 7. 1. 2√6. Необходимо учесть, что вершина M пирамиды проектируется на биссектрису угла BAD , т. е. на AC . Для решения задачи необходимо найти синус угла между векторами $\vec{AM}$ и $\vec{AC}$.

2. Рассмотрим векторы $\vec{a}(\sqrt{\sin^2 x + 0,5}; \sqrt{\cos^2 x - 0,5}; \sqrt{0,5})$ и $\vec{b}(1; 1; 1)$. Их скалярное произведение

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \sqrt{\sin^2 x + 0,5} + \sqrt{\cos^2 x - 0,5} + \sqrt{0,5}.$$

С другой стороны,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \varphi,$$

где $\varphi = \angle(\vec{a}, \vec{b})$, $|\vec{a}| = \sqrt{\sin^2 x + 0,5 + \cos^2 x - 0,5 + 0,5} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$, $|\vec{b}| = \sqrt{3}$:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \sqrt{3} \cos \varphi = \frac{3}{\sqrt{2}} \cos \varphi.$$

Наибольшее значение скалярного произведения равно $\frac{3}{\sqrt{2}}$.

Таким образом, наибольшее значение выражения $\sqrt{\sin^2 x + 0,5} + \sqrt{\cos^2 x - 0,5} + \sqrt{0,5}$ равно $3\sqrt{0,5}$. Оно достигается при $x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Вар. 8. 1. 2√2. Необходимо учесть, что вершина D проектируется на биссектрису угла BAC , т. е. на AK . Для решения задачи необходимо найти синус угла между векторами $\vec{AD}$ и $\vec{AK}$.

2. Рассмотрим векторы $\vec{a}(\sqrt{1+x}; \sqrt{1-x})$ и $\vec{b}(1; 1)$. Их скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b} = \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}$.

С другой стороны,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \varphi,$$

где $\varphi = \angle(\vec{a}, \vec{b})$, $|\vec{a}| = \sqrt{1+x+1-x} = \sqrt{2}$, $|\vec{b}| = \sqrt{2}$,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cos \varphi = 2 \cos \varphi.$$

Наибольшее значение скалярного произведения равно 2. Таким образом, наибольшее значение выражения $\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} + 1$ равно 3. Оно достигается при $x = 0$.

C—4

$$\text{Вар. 1. 1. } \arccos \frac{1}{\sqrt{10}} = 71,34^\circ; \arccos \frac{1}{\sqrt{14}}.$$

$$\text{Вар. 2. 1. } \arccos \frac{1}{2\sqrt{7}} = 79,6^\circ; \arccos \frac{1}{2\sqrt{7}}.$$

Вар. 3. 1. Необходимо доказать, что $\angle ACB = 90^\circ$, и тогда $AB = 5$.

$$\begin{aligned} \vec{AB} \cdot \vec{AC} + \vec{BC} \cdot \vec{BA} + \vec{CA} \cdot \vec{CB} &= \vec{AB} \cdot \vec{AC} + \vec{AB} \cdot \vec{CB} + \vec{CA} \cdot \vec{CB} \\ &= \vec{AB} \cdot (\vec{AC} + \vec{CB}) + \vec{CA} \cdot \vec{CB} = \vec{AB}^2 + \vec{CA} \cdot \vec{CB} = 25 + 0 = 25. \end{aligned}$$

Ответ. 25.

2. Пусть $\vec{CA}, \vec{CB}$ и $\vec{CC}_1$ — базисные векторы. Тогда $\vec{EF} = \vec{CB} + \vec{BF} = \frac{1}{2}\vec{CA} + \vec{CB} + \frac{1}{2}\vec{CC}_1$;

$$\vec{EF} = \frac{1}{4}\vec{CA} + \vec{CB} + \frac{1}{4}\vec{CC}_1; \quad \vec{CA} \cdot \vec{CB} = \frac{1}{2}\vec{CA} \cdot \vec{CC}_1 = \vec{CB} \cdot \vec{CC}_1$$

$$\left[\frac{1}{4}a^2 + a^2 + \frac{1}{4}a^2 - a^2 - \frac{1}{2} \right] = 0 + 0 - 2a^2,$$

$$EF = a\sqrt{2}, \quad \vec{EF} \cdot \vec{CC}_1 = \frac{1}{2}\vec{CC}_1 \cdot \frac{1}{2}a^2,$$

$$\cos \varphi = \frac{\vec{EF} \cdot \vec{CC}_1}{EF \cdot CC_1} = \frac{a^2}{2a \cdot a\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}; \quad \varphi = \arccos \frac{1}{2\sqrt{2}} = 69,18^\circ.$$

Ответ. 1) $a\sqrt{2}$; 2) $69,18^\circ$.

Вар. 4. 1. 100.

2. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$; 2) $\arccos \frac{1}{\sqrt{6}} = 65,54^\circ$. Задача решается аналогично задаче из варианта 3.

Вар. 5. 1. Поместим призму в прямоугольную систему координат. Пусть точка D — начало координат. Положительное направление оси Ox противоположно лучу DB , положительное направление оси Oy сонаправлено с лучом DC , а положительное направление оси Oz совпадает с лучом $\vec{CC}_1$. Обозначим искомый угол φ . Имеем $\vec{CB}_1 = 4; -2; 2$; $\vec{AB}_1 = 4; 2; 2$. Тогда

$$\sin \varphi = \frac{|\vec{CB}_1 \cdot \vec{AB}_1|}{|\vec{CB}_1| \cdot |\vec{AB}_1|} = \frac{16 - 4 + 4}{\sqrt{16 + 4 + 4} \cdot \sqrt{16 + 4 + 4}} = \frac{2}{3},$$

$$\varphi = \arcsin \frac{2}{3} = 41,49^\circ.$$

2. Пусть $BD = BC = BA = 1$ и пусть E — середина DC .

$$\vec{AE} = \vec{BE} = \vec{BA} = \frac{1}{2}\vec{BD} + \frac{1}{2}\vec{BC} = \vec{BA},$$

$$\vec{AE} \cdot \vec{BD} = \left[\frac{1}{2}\vec{BD} + \frac{1}{2}\vec{BC} = \vec{BA} \right] \cdot \vec{BD}$$

$$= \frac{1}{2}\vec{BD} \cdot \vec{BD} + \frac{1}{2}\vec{BC} \cdot \vec{BD} = \vec{BA} \cdot \vec{BD} = \frac{1}{2} \cdot 0 = \frac{1}{2} \cdot 0.$$

Отсюда следует, что $AE \perp BD$. Аналогично можно доказать, что $AE \perp BC$. В таком случае $AE \perp DBC$ и $DAC \perp DBC$.

Вар. 6. 1. $\arcsin \frac{5}{\sqrt{6}} = 43,59^\circ$. Задача решается аналогично задаче 1 из варианта 5.

2. Пусть $\vec{BA}, \vec{BC}$ и $\vec{BB}_1$ — базисные векторы.

$$\vec{BD}_1 = \vec{BA} + \vec{BC} + \vec{BB}_1, \quad A_1C_1 = \vec{AC} - \vec{BC} - \vec{BA},$$

$$\vec{B_1D_1} \cdot \vec{A_1C_1} = (\vec{BA} + \vec{BC} + \vec{BB}_1) \cdot (\vec{BC} - \vec{BA}) = \vec{BC}^2 - \vec{BA}^2 =$$

$$1 - 4 = 3 \neq 0.$$

Следовательно, $\vec{BD}_1$ — не перпендикулярен к A_1C_1 и $\vec{BD}_1$ — не перпендикулярен плоскости $A_1C_1D_1$.

Вар. 7. 1. Опустим из вершины M перпендикуляр MO на плоскость ABC . По теореме о трех перпендикулярах $OA \perp AC$. Очевидно, что точка O находится вне треугольника ABC . Пусть $\angle MAO = \varphi$.

$$\angle MAO = 180^\circ - \angle CB\vec{M}\vec{A},$$

$$\vec{MB} = \vec{MA} + \vec{AC} + \vec{CB};$$

$$|\vec{MB}|^2 = \vec{MA}^2 + \vec{AC}^2 + \vec{CB}^2 + 2\vec{MA} \cdot \vec{AC} + 2\vec{MA} \cdot \vec{CB} + 2\vec{AC} \cdot \vec{CB}$$

$$16 + 9 + 25 + 0 + 2 \cdot 4 \cdot 5 \cos(180^\circ - \varphi) + 0 = 50 + 40 \cos(180^\circ - \varphi).$$

По условию $|\vec{MB}| = \sqrt{30}$. Тогда $50 + 40 \cos \varphi = 30$, $\cos \varphi = -\frac{1}{2}$ и $\varphi = 60^\circ$. Высота пирамиды $MO = MA \cdot \sin 60^\circ = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$.

2. Пусть $DA = DB = DC = 1$ и пусть $\angle ADC = \alpha$, $\angle ADB = \beta$, $\angle CDB = \gamma$.

$$\vec{AC} \cdot \vec{AB} = (\vec{DC} - \vec{DA})(\vec{DB} - \vec{DA}) =$$

$$\vec{DC} \cdot \vec{DB} - \vec{DA} \cdot \vec{DB} - \vec{DC} \cdot \vec{DA} + \vec{DA}^2 =$$

$$\cos \gamma - \cos \beta - \cos \alpha + 1, \quad \cos \beta = 0, \quad \cos \alpha = 0.$$

Значит, $\cos \beta = 0$ и $\cos \alpha = 0$, $\cos \gamma = 1$, а потому $1 + \cos \gamma = 0$. В таком случае $\vec{AC} \cdot \vec{AB} = 0$ и $\angle ACB$ острый. Аналогично доказываем, что и все остальные углы острые.

Вар. 8. 1. $\frac{3\sqrt{6}}{4}$. Задача решается аналогично задаче 1 на варианте 7.

2. От вершины M отложим единичные векторы $\vec{MA}, \vec{MB}, \vec{MC}$ и $\vec{MD}$, сонаправленные с векторами $\vec{ME}, \vec{MF}, \vec{MK}$ и $\vec{MP}$. Тогда $ABCD$ — квадрат и $\vec{AB} \cdot \vec{BC} = 0$.

$$(\vec{MB} - \vec{MA})(\vec{MC} - \vec{MB}) = 0;$$

$$\vec{MB} \cdot \vec{MC} - \vec{MA} \cdot \vec{MC} - \vec{MB}^2 + \vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0,$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = 1 + \cos \alpha = 0;$$

$$\cos \beta = 2 \cos \alpha - 1 \text{ и } \beta = \arccos(2 \cos \alpha - 1).$$

Вар. 1. 1. а) (100; 200; 1); б) (100; 200; 1).

2. Так как при движении отрезок отображается на равный отрезок, то каждая сторона треугольника отображается на равный ей отрезок, и, следовательно, треугольник отображается на треугольник с соответственно равными сторонами, т. е. на равный треугольник.

Вар. 2. 1. а) (0,01; 0,02; 1); б) (0,1; 0,1; 0).

2. Задача решается аналогично задаче 2 из варианта 1.

Вар. 3. 1. *Указание.* а) Вычислите координаты середины отрезка AB ; б) вычислите координаты середины отрезка BC .

2. Рассмотрим двугранный угол, образованный полуплоскостями α и β с границей a и линейным углом lk , где l и k — лучи, принадлежащие полуплоскостям α и β соответственно. Пусть при движении $a \rightarrow a_1$, $\alpha \rightarrow \alpha_1$, $\beta \rightarrow \beta_1$, $k \rightarrow k_1$, $l \rightarrow l_1$. Очевидно, что прямая a_1 будет общей границей полуплоскостей α_1 и β_1 , в которых будут соответственно лежать лучи l_1 и k_1 . Так как при движении углы сохраняются, то углы lk и l_1k_1 равны между собой. Следовательно, при движении двугранный угол отображается на равный ему двугранный угол.

Вар. 4. 1. а) {3; 3; 3}; б) *Указание.* Найдите середину отрезка AB .

2. Пусть прямая AB пересекает плоскость α в точке A и образует с ней угол φ . Пусть C — проекция точки B на плоскость α . Проведем в плоскости α через точку C прямую b . Очевидно, что $Bb \perp b$. Пусть при движении $\alpha \rightarrow \alpha_1$, $A \rightarrow A_1$, $B \rightarrow B_1$, $C \rightarrow C_1$ и $b \rightarrow b_1$. Очевидно, что прямая A_1B_1 будет пересекать плоскость α_1 , а прямые A_1C_1 и b_1 будут лежать в плоскости α_1 . Так как при движении углы сохраняются, то $B_1C_1 \perp b_1$. Значит, $B_1C_1 \perp A_1C_1$ и $\angle B_1A_1C_1 = \angle BAC$. Следовательно, при движении прямая и плоскость, составляющие угол φ , отображаются на прямую и плоскость, составляющие угол φ .

Вар. 5. 1. Заметим прежде всего, что точка $A(10; 20; 0)$ лежит в плоскости xOy . Пусть при осевой симметрии относительно прямой a точка A отображается на точку $B(x; y; z)$. Тогда середина отрезка AB — точка M имеет координаты $(k; k; 0)$, где $k \neq 0$, так как принадлежит прямой a и не совпадает с началом координат — точкой O . Значит, $\vec{MA} = \vec{MO}$ и $(10 - k)k + (20 - k)k = 0$, откуда $k = 15$. Используя формулы координат середины отрезка, получаем $15 = \frac{10 + x}{2}$, $15 = \frac{20 + y}{2}$ и $0 = \frac{0 + z}{2}$, откуда $A_1(20; 10; 0)$.

2. При данном отображении пространства на себя произвольные точки $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$ переходят в точки $A_1(2x_1; 2y_1; 2z_1)$ и $B_1(2x_2; 2y_2; 2z_2)$. Пользуясь координатной формулой для нахождения расстояния между точками, находим,

что $AB \neq A'B'$. Это значит, что данное отображение движением не является.

Вар. 6. Задачи решаются аналогично задачам из варианта 5.

Ответ. 1. (0; 10; 20). 2. Да, является.

Вар. 7. 1. Введем прямоугольную систему координат, будем рассматривать прямые m_i и n_i в качестве осей Ox и Oy . При симметрии относительно оси Ox точка $A(x; y) \rightarrow B(x; -y)$, а при симметрии относительно оси Oy точка $B(x; -y) \rightarrow C(-x; -y)$. В таком случае точки A и C симметричны относительно оси Oz , которая перпендикулярна к Ox и Oy .

2. Да, будет. Такая точка может быть получена композицией центральной симметрии относительно начала координат и параллельного переноса на вектор $\vec{p}(2; -3; 1)$.

Вар. 8. 1. При симметрии относительно A имеем $M_1 \rightarrow M_2$, при симметрии относительно B имеем $M_2 \rightarrow M_3$, а при симметрии относительно C имеем $M_3 \rightarrow M_4$. Образовался пространственный четырехугольник $MM_1M_2M_3$. Точки M и M_4 будут симметричны относительно точки D — середины MM_3 . Точки A, B, C и D — последовательно середины сторон указанного четырехугольника. Тогда легко доказать, что $ABCD$ — параллелограмм.

2. Да, будет. Такая точка может быть получена композицией зеркальной симметрии относительно плоскости xOz и параллельного переноса на вектор $\vec{p}(1; 1; 2)$.

C—6

Вар. 1. 1. Рассмотрим прямую a , перпендикулярную к некоторой плоскости α , и две пересекающиеся прямые b и c , лежащие в плоскости α . Очевидно, что $a \perp b$ и $a \perp c$. Пусть, при движении $a \rightarrow a_1, b \rightarrow b_1, c \rightarrow c_1, \alpha \rightarrow \alpha_1$. Легко доказать, что прямые c_1 и b_1 лежат в плоскости α_1 , а прямая a_1 пересекает плоскость α_1 . Таким при движении углы сохраняются, то $a_1 \perp b_1$ и $a_1 \perp c_1$. Значит, $a_1 \perp \alpha_1$, т. е. при движении прямая, перпендикулярная к плоскости, отображается на прямую, перпендикулярную к плоскости.

2. Очевидно, что если одна из двух параллельных прямых не пересекает плоскость α , то и другая пересекает ее. Пусть данные прямые a и b пересекают данную плоскость α в точках A и B соответственно. Значит, при параллельном переносе на вектор $\vec{AB}$ имеем $a \rightarrow b, \alpha \rightarrow \alpha'$. Тогда до доказанному в пункте а) прямая b будет перпендикулярна к плоскости α' .

Вар. 2. Условие не. Задачи решаются аналогично задачам из варианта 1.

Вар. 3. 1. Пусть, дана правильная четырехугольная пирамида $EABCD$ с высотой EO . При симметрии относительно прямой EO $E \rightarrow E, A \rightarrow C, C \rightarrow A, B \rightarrow D, D \rightarrow B$. Значит, квадрат $ABCD$ отображается на себя. Следовательно, EO — ось симметрии пирамиды.

2. Пусть H — произвольная точка пирамиды. Рассмотрим сечение пирамиды плоскостью EOH . Очевидно, оно является треугольником. По доказанному в пункте 1) при симметрии относительно прямой EO точка H отображается на точку H_1 , принадлежащую пирамиде. Но очевидно также, что точка H_1 принадлежит плоскости EOH , т. е. принадлежит сечению. Это означает, что треугольник, полученный в сечении, отображается на себя при симметрии относительно прямой EO , проходящей через одну из его вершин. Значит, этот треугольник равнобедренный.

Вар. 4. Указание. Задачи решаются аналогично задачам из варианта 3.

Вар. 5. 1. Указание. Задача решается аналогично задаче 1 из варианта 3.

2. Проведем плоскость α через прямую c , содержащую середины противоположных ребер правильного тетраэдра. Пусть точка M принадлежит сечению тетраэдра плоскостью α . Тогда по доказанному в задаче 1 при симметрии относительно прямой c точка M отображается на точку M_1 , принадлежащую одновременно плоскости α и тетраэдру. Значит, сечение при симметрии относительно прямой отобразится на себя. Возьмем теперь произвольную точку H , принадлежащую одной из двух частей, на которые плоскость α делит тетраэдр. По доказанному в пункте 1) при симметрии относительно прямой c точка H отображается на точку H_1 , принадлежащую тетраэдру. По определению симметричных точек отрезок HH_1 пересекает прямую c , а значит, и плоскость α . Следовательно, точки H и H_1 принадлежат разным частям тетраэдра. Значит, эти части отображаются друг на друга при симметрии относительно прямой c . Отсюда следует, что плоскость α делит тетраэдр на две равные части.

Вар. 6. Указание. Задачи решаются аналогично задачам из варианта 5.

Вар. 7. 1. Пусть $p \perp q$ (рис. 9, а). Композицией осевых симметрий последовательно относительно осей p и q является парал-

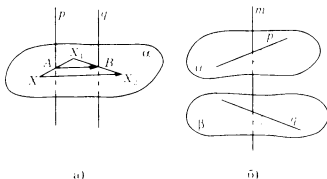


Рис. 9

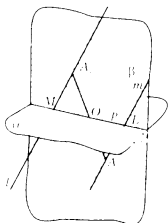


Рис. 10

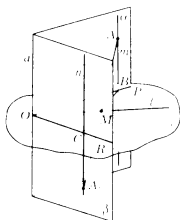


Рис. 11

тельный перенос на вектор $2\vec{AB}$, который отображает точку X на точку X_1 . Композиция же симметрий последовательно относительно осей q и r есть параллельный перенос на вектор $2\vec{BA}$, который отображает точку X_1 на точку X . Исходя из равенства $2\vec{AB} = 2\vec{BA}$, имеем $\vec{AB} = \vec{0}$, что противоречит условию. Пусть, те перь r и q — скрещивающиеся прямые (рис. 9, б). В таком случае $S = S_1$ отображает общий перпендикуляр прямых r и q на себя, причем это отображение прямой m есть перенос $\vec{s} \neq \vec{0}$, но тогда $S_1 = S \neq S = S_1$, что снова противоречит условию. Отсюда следует, что r и q — пересекающиеся прямые.

2. Через точку A и прямую l (рис. 10) проводим плоскость β , которая пересекает плоскость α по прямой p . В плоскости β строим прямую m , параллельную l . Пусть эта прямая пересекает p в точке L . Через середину O отрезка ML и точку A проводим прямую до пересечения с l в точке A_1 . Легко доказать, что A_1 — искома точка.

Вар.8. 1. На рисунке 11 угол POB — линейный угол двугранного угла $\alpha\alpha\beta$ и l — его биссектриса. Выберем в грани α произвольную точку A и докажем, что при осевой симметрии относительно оси l она отображается на точку, принадлежащую грани β . Для этого через точку A проведем плоскость, параллельную ребру a и перпендикулярную l . Эта плоскость пересекает грани α и β по параллельным прямым m и n , а плоскость линейного угла $\alpha\beta$ по прямой CB . CB пересекает l в точке M . Через точки A и M проведем прямую до пересечения с гранью β в точке A_1 . Тогда легко доказать, что $l \perp AA_1$ и $A_1M = MA$. Таким образом, что точки A и A_1 симметричны относительно оси l . Аналогично можно доказать, что каждая точка грани α имеет симметричную себе точку в

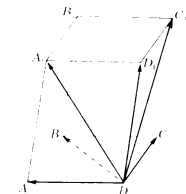


Рис. 12

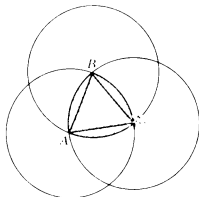


Рис. 13

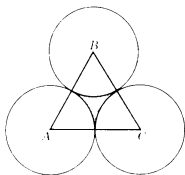


Рис. 14

граней β и наоборот. Значит, при симметрии относительно оси l двугранный угол $\alpha\alpha\beta$ отображается на себя. Следовательно, l — ось симметрии двугранного угла.

2. На рисунке 12 $\vec{DB} = \vec{DA}_1 = \vec{DC}_1 = \vec{DA} + \vec{DC} = \vec{DA}_1 + \vec{DD}_1 = \vec{DC} + \vec{DD}_1 = 2\vec{DA} + 2\vec{DC} = 2\vec{DD}_1$.

$2(\vec{DA} + \vec{DC} + \vec{DD}_1) = 2\vec{DB}_1$. Это значит, что точка B_1 есть середи́на диагонали построенного на отрезках DB , DA_1 и DC_1 параллелепипеда, т. е. центр его симметрии.

С—7

Вар. 1. 1. $S\sqrt{3}$, 2. 8π .

Вар. 2. 1. $2Q$, 2. 64π .

Вар. 3. 1. $\arctg(\pi \lg \phi)$,
2. $12\pi\sqrt{3}$.

Вар. 4. 1. $\arctg\left|\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\pi}\right|$,
2. 8π .

Вар. 5. 1. $2a^2\sqrt{3}$,
2. πa^2 .

Указание. Боковая поверхность состоит из трех частей, которые вместе составляют половину площади боковой поверхности цилиндра с высотой, равной a , и радиусом основания a (рис. 13, вид сверху).

Вар. 6. 1. 42.

2. $\frac{\pi a^2}{2}$, Указание. Боко-

вая поверхность состоит из трех частей, которые вместе составляют половину площади боковой поверхности цилиндра с высотой, равной a , и радиусом основания $\frac{a}{2}$ (рис. 14, вид сверху).

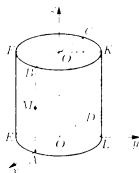


Рис. 15

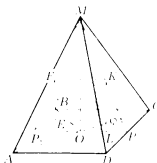


Рис. 16

Вар. 7. 1. Поместим цилиндр в прямоугольную систему координат, как это показано на рисунке 15. Пусть R — радиус основания, а h — высота цилиндра. Имеем $A(R; 0; 0)$, $C(-R; 0; h)$, $M(-R; 0; \frac{h}{2})$, $L(0; R; 0)$, $AC: 2R; 0; h$, $ML: -R; R; -\frac{h}{2}$. Тогда $AC \perp ML$, то $AC \cdot ML = 0$, т.е. $2R^2 - \frac{h^2}{2} = 0$. Кроме того, $2Rh = 4$ и $h = \frac{2}{R}$. Тогда $2R^2 - \frac{2}{R^2} = 0$, $R = 1$, $h = 2$; $S = 4\pi + 2\pi \cdot 1 = 6\pi$. Ответ: 6π .

2. На рисунке 16 $EFKL$ — осевое сечение цилиндра. По условию $KL = EL = 2R$, $LP = \frac{a}{2}R$, $\frac{KL}{LP} = \operatorname{tg} \varphi = 2$, $\frac{2R}{\frac{a}{2}R} = 2$. Отсюда $R = \frac{a}{4}$, $S_{\text{пол}} = 2\pi R \cdot 2R = 4\pi R^2 = 4\pi \frac{a^2}{16} = \frac{\pi a^2}{4}$. Ответ: $\frac{\pi a^2}{4}$.

Вар. 8. 1. Поместим цилиндр в прямоугольную систему координат, как это показано на рисунке 15. Пусть R — радиус основания, а h — высота цилиндра, тогда $X(\frac{R}{2}; \frac{R}{2}; 0)$, $M(\frac{R}{2}; \frac{R}{2}; \frac{h}{2})$ и $MN = \sqrt{R^2 + \frac{h^2}{4}}$. Исходя из условия, имеем $\sqrt{R^2 + \frac{h^2}{4}} = 17$ и $\frac{h}{2} = \frac{8}{R}$. Тогда $2Rh = 16$ и $R^2 + \frac{16}{R^2} = 17$, т.е. $R^4 - 17R^2 + 16 = 0$, откуда $R = 1$, $R = 4$. Значит, $h_1 = 8$, $h_2 = 2$. Тогда $S = 16\pi + 2\pi \cdot 1 = 18\pi$, $S = 16\pi + 2\pi \cdot 16 = 48\pi$. Ответ: 18π или 48π .

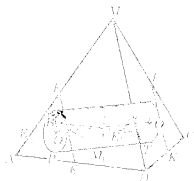


Рис. 17

Радиус основания цилиндра $r = \frac{EK}{2 \times 3} = \frac{a \times 2 - h}{2 \times 3}$.

$$S_{\text{бок.}} = 2\pi rh = 2\pi \frac{a \times 2 - h}{2 \times 3} \cdot h = \frac{\pi h}{3} (a \times 2 - h).$$

$$\text{Откуда, } \frac{\pi h}{3} (a \times 2 - h).$$

С—8

Вар. 1. 1. πa^2 ; 2. 63π .

Вар. 2. 1. $\frac{\pi m^2 \sqrt{3}}{4}$; 2. 2 и 14.

Вар. 3. 1. 8×2 ; 2. $\pi l \cdot \sin \alpha \lg \alpha$.

Вар. 4. 1. 150π ; 2. $\frac{\pi n^2 \sin \varphi}{\sin \varphi}$.

Вар. 5. 1. Если наибольший угол между образующими боковой поверхностью, то наибольшую площадь имеет сечение с наименьшим периметром дугами образующими, а если острый или тупой, то сечение боковое. Если α — центральный угол развертки, то $\alpha = \frac{R}{L} \cdot 360^\circ$

и тогда $\frac{R}{L} = \frac{3}{4}$. Пусть φ — наибольший угол между образующими и $\sin \frac{\varphi}{2} = \frac{3}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$. Откуда $15^\circ < \frac{\varphi}{2} < 90^\circ$, т. е. $30^\circ < \alpha < 180^\circ$. Сечение боковое, наибольшую площадь имеет сечение с наименьшим периметром дугами образующими. Если β — центральный угол, то $\sin \frac{\beta}{2} = \frac{H}{L}$, т. е.

H — высота конуса, h — высота сечения, $H = \frac{L}{2} \cdot \frac{9}{16}$, $\frac{L \times 7}{2}$; $9 = \frac{L \times 2}{2}$. Тогда $\sin \beta = \frac{\sqrt{14}}{4}$ и $\beta = \arcsin \frac{\sqrt{14}}{4}$. 0, если $\arcsin \frac{\sqrt{14}}{4} = 2,60^\circ$.

2. Как показано на рисунке 17, окружность основания цилиндра вписана в треугольник EFK и EFK — правильный. Это означает, что плоскость сечения цилиндра параллельна плоскости основания. Пусть сечение BMD , а сечение основания — сечение, лежащее на стороне, параллельная стороне AC . $AC = a \times 2$; $AP = \frac{a \times 2 - h}{2}$;

$$EK = 2AP = a \times 2 - h;$$

$$\frac{EK}{2 \times 3} = \frac{a \times 2 - h}{2 \times 3}.$$

Вар. 6. 1. 90. Указания: Задача решается аналогично задаче 1 из варианта 5, но в данном случае наибольшую площадь имеет осевое сечение.

2. 60.

Вар. 7. 1. Основание конуса лежит в плоскости $z = 2$. Пусть $M(x; y; 2)$ — центр окружности основания, $MA = MB = MC$.

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{(x-4)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{(x-3)^2 + (y-4)^2}.$$

Отсюда следует, что $\begin{cases} 2x - 4y = 5 \\ 2x - 4y = 5 \\ 6x - 8y = 25, \end{cases}$ откуда $x = \frac{5}{2}$,

$y = \frac{5}{2}$ и $z = 2$. Координаты вершины конуса $M(\frac{5}{2}; \frac{5}{2}; 1)$. Радиус

основания $R = \frac{9}{\sqrt{4-4}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$. Образующая $L = \frac{10}{\sqrt{4-9}} = \frac{\sqrt{46}}{2}$.

$$S_{\text{пол}} = \pi RL = \pi \cdot \frac{\sqrt{10}}{2} \cdot \frac{\sqrt{46}}{2} = \frac{\pi \sqrt{115}}{2}.$$

Сечение делит высоту конуса в отношении 1 : 3.

$$S_{\text{сеч}} = \frac{5\pi}{2}, S_{\text{пол}} = \frac{1}{9} S_{\text{пол}} = \frac{5\pi}{18}.$$

Ответ: $S = \frac{5\pi}{18}$, $M(\frac{5}{2}; \frac{5}{2}; 1)$, $S_{\text{пол}} = \frac{\pi \sqrt{115}}{2}$.

2. Пусть $ABCD$ — осевое сечение конуса и AC , BD , BK — высота конуса. Легко доказать, что $BK = KD$, $KD = R + r$, где R и r — радиусы оснований. Пусть L — образующая конуса и φ — угол между ней и плоскостью основания. Отсюда $BK = KD = L \cdot \sin \varphi$. В таком случае $R + r = L \cdot \sin \varphi$ и $S_{\text{пол}} = \pi RL + \pi r^2 = \pi L^2 \cdot \sin \varphi$. Площадь боковой поверхности второго конуса равна

$$\pi \cdot BK \cdot BD = \pi L \cdot \sin \varphi \cdot L \sqrt{2} \sin \varphi = \pi L^2 \sqrt{2} \sin^2 \varphi.$$

По условию $\frac{\pi L^2 \sin \varphi}{\pi L^2 \sqrt{2} \sin^2 \varphi} = \frac{\sqrt{6}}{3}$. Отсюда $\sin \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\varphi = 60^\circ$.

Ответ: 60° .

Вар. 8. 1. $\frac{65\pi}{4}$. Указания: Необходимо учесть, что треугольник ABC прямоугольный и радиус основания конуса равен $\frac{5}{2}$.

2. 60.

С—9

Вар. 1. 1. $\frac{81\pi}{5}$, 2. $\frac{\pi a^2 \sqrt{2}}{12}$.

Вар. 2. 1. 16π , 2. $\frac{2\pi a^2 \sqrt{3}}{9}$.



Рис. 18

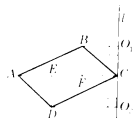


Рис. 19

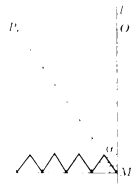


Рис. 20

Вар. 7. 1. Можно доказать, что площадь поверхности, образованной при вращении ломаной линии вокруг оси l (рис. 20), равна площади поверхности, которая образуется при вращении отрезка MP вокруг той же оси.

Вар. 3. 1. $\pi a^2 (3 + \sqrt{2})$. 2. $\frac{\pi a^2}{4 \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \beta}$

Вар. 4. 1. 96π . 2. $\frac{\pi a^2 \cos^2 \alpha + 4g^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos \varphi}$

Вар. 5. 1. Обозначим через S_d площадь поверхности, которая образуется при вращении отрезка a вокруг оси. Тогда

$$S = \pi \cdot AC \cdot (AO_1 + CO_2) + \pi a \cdot AO_1 + \pi a \cdot CO_2 + \pi (AO_1 + CO_2) \cdot (AC + a) \text{ (рис. 18);}$$

$$\angle BAC = \angle BCA = 30^\circ;$$

$$\angle BAE = \angle O_1BA = 15^\circ; \angle O_2BC = 45^\circ;$$

$$AC = a\sqrt{3}; AO_1 = a \sin 15^\circ; CO_2 = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Тогда $S = \pi a^2 \left[\sin 15^\circ + \frac{\sqrt{2}}{2} \right] (\sqrt{3} + 1)$.

Ответ. $\pi a^2 \left[\sin 15^\circ + \frac{\sqrt{2}}{2} \right] (\sqrt{3} + 1)$.

2. $S = \frac{m^2 \operatorname{ctg} \varphi \cdot \cos \frac{\pi}{5}}{1 + \operatorname{ctg}^2 \varphi \cdot \cos^2 \frac{\pi}{5}}$

Вар. 6. 1. $S_{\text{поверхн.}} = \pi BC \cdot BO_1 + \pi \cdot AB \cdot (AC + BO_1) + \pi \cdot AD \cdot (AC + DO_2) + \pi DC \cdot DO_2$.

Так как $AB = CD$ и $BC = AD$ (рис. 19), то

$$S = \pi \cdot BC \cdot BO_1 + \pi \cdot AB \cdot (AC + BO_1) + \pi \cdot BC \cdot (AC + DO_2) + \pi \cdot AB \cdot DO_2 =$$

$$= \pi \cdot BC \cdot (BO_1 + DO_2 + AC) + \pi \cdot AB \cdot (BO_1 + DO_2 + AC) =$$

$$= \pi (AB + BC) \cdot (BO_1 + DO_2 + AC);$$

$$AB + BC = \frac{P}{2}, BO_1 + DO_2 = AC.$$

Тогда $S = \pi \frac{P}{2} \cdot 2 \cdot AC = \pi Pd$.

Ответ. πPd .

$$L^2 \operatorname{ctg} \varphi \cdot \cos \frac{\pi}{5}$$

2. $\operatorname{ctg}^2 \varphi \cdot \cos^2 \frac{\pi}{5}$

$$MP = 8a; \quad PMO = \frac{\alpha}{2}; \quad PO = 8a \cdot \sin \frac{\alpha}{2}.$$

$$S_{\text{пл.}} = \pi \cdot PO \cdot PM = \pi \cdot 8a \cdot 8a \sin \frac{\alpha}{2} = 64\pi a^2 \sin \frac{\alpha}{2}.$$

$$\text{Ответ: } 64\pi a^2 \sin \frac{\alpha}{2}.$$

2. На рисунке 21 изображено осевое сечение конуса: $OC = \frac{a}{2}$; BC — высота правильного треугольника, лежащего в основании призмы; $BC = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Радиус основания конуса

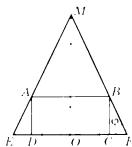


Рис. 21

$R = \frac{a}{2}$; $\frac{a\sqrt{3}}{2} \operatorname{ctg} \varphi$. Высота конуса $H = \frac{a}{2}(1 + \sqrt{3} \operatorname{ctg} \varphi) \cdot \operatorname{tg} \varphi$.

$$S = \frac{RH}{3} = \frac{a^2}{4}(1 + \sqrt{3} \operatorname{ctg} \varphi) \cdot \operatorname{tg} \varphi = \frac{a^2}{4} \left| \operatorname{tg} \varphi + \frac{3}{\operatorname{tg} \varphi} \right| = 2\sqrt{3} \left| \operatorname{tg} \varphi + \frac{3}{\operatorname{tg} \varphi} - \sqrt{3} \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} \operatorname{tg} \varphi} \right| = 2\sqrt{3}.$$

$S_{\text{пл.}} = a^2 \sqrt{3}$. Это достигается, если $\operatorname{tg} \varphi = \sqrt{3}$, т. е. $\varphi = 60^\circ$.

$$\text{Ответ: } S = \frac{a^2}{4} \left| \operatorname{tg} \varphi + \frac{3}{\operatorname{tg} \varphi} \right| = 2\sqrt{3} \left| \right|; S_{\text{пл.}} = a^2 \sqrt{3}; \varphi = 60^\circ.$$

Вар. 8. 1. $36\pi a^2 \sqrt{2}$.

$$2. S = \frac{a^2}{3} \left| \operatorname{tg} \varphi + \frac{3}{\operatorname{tg} \varphi} \right| = 2\sqrt{3} \left| \right|; S_{\text{пл.}} = \frac{4a^2 \sqrt{3}}{3}; \varphi = 60^\circ.$$

Задача решается аналогично задачам из варианта 7.

С—10

Вар. 1. 1. а) $(x - 3)^2 + y^2 + z^2 = 16$; б) да; нет. 2. 13.

Вар. 2. 1. а) $x^2 + y^2 + (z - 4)^2 = 9$; б) нет; да. 2. 13.

Вар. 3. 1. $(x - 1)^2 + y^2 + (z - \sqrt{3})^2 = 4$ или

$$(x - 1)^2 + y^2 + (z + \sqrt{3})^2 = 4. \quad 2. \frac{a\sqrt{2} \cos 2\alpha}{4}.$$

$$\text{Вар. 4. 1. } x^2 + y^2 + z^2 = 9 \text{ или } x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 9. \quad 2. \frac{a\sqrt{2} \cos \alpha}{2 \cos \frac{\alpha}{2}}.$$

Вар. 5. 1. Очевидно, что $z = 0$. Пусть $M(x; y; z)$ — искомая точка пересечения. Она лежит на прямой AB . Это значит, что $\vec{AM} = k\vec{AB}$.

$$\vec{AM} = (x - \sqrt{2}; y - \sqrt{2}; z); \vec{AB} = (-2\sqrt{2}; \sqrt{2}; \sqrt{2});$$

$$\begin{cases} x - \sqrt{2} = 2k\sqrt{2} \\ y - \sqrt{2} = k\sqrt{2} \\ z = k\sqrt{2}, \end{cases} \begin{cases} x = 2k\sqrt{2} + \sqrt{2} \\ y = k\sqrt{2} + \sqrt{2} \\ z = k\sqrt{2}. \end{cases}$$

С другой стороны, эта точка лежит на сфере. Тогда

$$(\sqrt{2}(1 - 2k))^2 + (\sqrt{2}(k + 1))^2 + (k\sqrt{2})^2 = 4.$$

Отсюда $6k^2 - 2k = 0$; $k_1 = 0$, $k_2 = 3$.

$$\text{Следовательно, } \begin{cases} x_1 = 5\sqrt{2}, & x_2 = \sqrt{2}, \\ y_1 = 4\sqrt{2}, & y_2 = \sqrt{2}, \\ z_1 = 3\sqrt{2}, & z_2 = 0. \end{cases}$$

Ответ: $(5\sqrt{2}; 4\sqrt{2}; 3\sqrt{2})$ и $(\sqrt{2}; \sqrt{2}; 0)$.

2. Отметим, что центр сферы $O_1 \left(0; 0; \frac{1}{2} \right)$ и ее радиус равен $\frac{7}{13}$.

Опустим из начала координат перпендикуляр OK на AB , $OK = \frac{12}{5}$.

Соединим точки C и K . В треугольнике COK опустим перпендикуляр OM на CK , $CK = \sqrt{\frac{144}{25} + 1} = \frac{13}{5}$, $OM = \frac{12}{13}$ (OM — расстояние от точки O до плоскости ABC). Проведем $O_1M_1 \perp CK$ (O_1M_1 — расстояние от центра сферы O_1 до плоскости ABC), $O_1M_1 = \frac{1}{2}OM = \frac{6}{13} = \frac{7}{13}$. Следовательно, пересечением сферы и

плоскости является окружность радиуса $\rho = \sqrt{\frac{49}{169} - \frac{36}{169}} = \frac{\sqrt{13}}{13}$.

Длина этой окружности $S = \frac{2\pi\sqrt{13}}{13}$.

Ответ. Да, пересекает; длина линии пересечения равна $\frac{2\pi\sqrt{13}}{13}$.

Вар. 6. 1. $\left(\frac{1}{2}; 1; \frac{1}{2} \right); \left(0; 3; \frac{5}{2} \right)$.

2. Если $R = \frac{2}{\sqrt{5}}$, то сфера и плоскость пересекаются по окружности. Если $R = \frac{2}{\sqrt{5}}$, то сфера и плоскость имеют только одну общую точку. Если $R < \frac{2}{\sqrt{5}}$, то сфера и плоскость общих точек не имеют. Указания к задаче решаются аналогично задачам из варианта 5.

Вар. 7. 1. Перенесем уравнения данных сфер в каноническом виде:

$$(x - 1)^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 4 \text{ и } (x + 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 9.$$

Первая сфера имеет центр в точке $O_1(1; 0; 1)$, а вторая — в точке $O_2(-1; 1; 1)$. Радиусы сфер $R_1 = 2$, $R_2 = 3$. Расстояние между центрами $O_1O_2 = \sqrt{4 + 1 + 1} = 3$; $R_2 - R_1 = O_1O_2 = R_1 + R_2$. Следовательно, сферы пересекаются. Пусть A — общая точка этих сфер. Тогда высота h треугольника O_1AO_2 есть радиус линии пересечения этих сфер, $O_1O_2 = 3$, $O_1A = 2$, $O_2A = 3$, $S_{O_1AO_2} = 2\sqrt{2}$, $h = \frac{4\sqrt{2}}{3}$. Тогда длина окружности $C = \frac{8\pi\sqrt{2}}{3}$. Ответ, $\frac{8\pi\sqrt{2}}{3}$.

2. $M(x; y; z)$ принадлежит искомому множеству,

$$\begin{aligned} MA &= \sqrt{(x - 2)^2 + y^2 + z^2} = MB = \sqrt{(x + 1)^2 + y^2 + z^2}; \\ 2MA &= MB; \\ 2\sqrt{(x - 2)^2 + y^2 + z^2} &= \sqrt{(x + 1)^2 + y^2 + z^2}; \\ 4(x - 2)^2 + 4y^2 + 4z^2 &= (x + 1)^2 + y^2 + z^2. \end{aligned}$$

Отсюда $(x - 4)^2 + y^2 + z^2 = 16$.

Ответ. Искомое множество — сфера $(x - 4)^2 + y^2 + z^2 = 16$.

Вар. 8. 1. $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 + (z - 2)^2 = 22$.

2. $x^2 + \left|y - \frac{4}{3}\right|^2 + z^2 = \frac{16}{9}$. Указания. Задача решается аналогично задаче из варианта 7.

C—11

Вар. 1. 1. 400%, 2. 6%.

Вар. 2. 1. 676%, 2. 4%.

Вар. 3. 1. 676%, 2. $4\sqrt{2}$.

Вар. 4. 1. 676%, 2. 36%, 36%.

Вар. 5. 1. $8\sqrt{2}$.

2. Пусть искомое расстояние равно x . Тогда радиус большей окружности кольца равен $\sqrt{R^2 - x^2}$, радиус меньшей окружности $R - x$. Последнее следует из того, что осевое сечение — равнобедренный прямоугольный треугольник, $S = \pi(R^2 - x^2) - \pi(R - x)^2 = 2\pi(x + Rx)$. Легко доказать, что наибольшее значение этой функции достигается при $x = \frac{R}{2}$. Ответ, $\frac{R}{2}$.

Вар. 6. 1. 4 и 5.

2. Пусть искомое расстояние равно x . Тогда радиус основания цилиндра равен $\sqrt{R^2 - x^2}$. Площадь боковой поверхности цилиндра

$$S = 2\pi x \sqrt{R^2 - x^2} = 2\pi \sqrt{R^2 x^2 - x^4}.$$

Рассмотрим функцию $p(x) = R \cdot x - x^2$, где $0 \leq x \leq R$. Эта функция, а значит, и площадь боковой поверхности цилиндра, достигает наибольшего значения при $x = \frac{R}{\sqrt{2}}$. Ответ: $\frac{R}{\sqrt{2}}$.

Вар. 7. 1. Концы хорд MA , MB и MC лежат на поверхности шара и являются вершинами правильного треугольника ABC . Образуется правильная пирамида $MABC$. Пусть MO_1 — высота этой пирамиды. Тогда центр O шара лежит в точке пересечения среднего перпендикуляра KO к ребру MA (K — середина AM). Легко доказать, что $KOM \perp MO_1A$. Отсюда $R = MO = \frac{AM}{2MO_1}$. Пусть

длина хорды равна a . Тогда $AC = 2a \sin \frac{\alpha}{2}$ и $AO_1 = \frac{2a \sin \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3}}$.

$$MO = \sqrt{a^2 - \frac{4a^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{3}} = \frac{a}{\sqrt{3}} \sqrt{3 - 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}},$$

$$R = \frac{a \sqrt{3}}{2a \sqrt{3 - 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}}.$$

Отсюда $a = \frac{2R \sqrt{3 - 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{3}} = \frac{2R \sqrt{1 + 2 \cos \alpha}}{\sqrt{3}}$.

Ответ: $\frac{2R \sqrt{1 + 2 \cos \alpha}}{\sqrt{3}}$.

2. $\pi(a^2 + b^2 + c^2)$. Указания. Диаметр сферы служит диагональю параллелепипеда, построенного на этих хордах.

Вар. 8. 1. Центры этих шаров являются вершинами правильного тетраэдра, длина ребра которого равна $2R$. Центр искомой сферы совпадает с центром названного тетраэдра. Ее радиус равен разности радиуса сферы, которой принадлежит вершина тетраэдра, и радиуса шара. Радиус сферы можно найти, например, спос. 6-м, который показан в задаче 1 из варианта 7. Ее радиус равен $R\sqrt{3}$. Тогда радиус искомой сферы равен $\sqrt{2}$.

$$\frac{R\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - R = \frac{R(\sqrt{3} - \sqrt{2})}{\sqrt{2}} = \frac{R}{2}(\sqrt{6} - 2).$$

Ответ: $\frac{R}{2}(\sqrt{6} - 2)$.

2. Суммы длин скрещивающихся ребер тетраэдра равны между собой. Указания. Необходимо воспользоваться тем, что отрезки касательных, проведенных из одной точки к сфере, равны между собой.

C-12

Var. 1. 1. 2; 2. $\frac{6}{5}$.

Var. 2. 1. $\frac{2}{3}$; 2. 16π .

Var. 3. 1. $1\frac{1}{6}$. Указание. Центр описанного шара лежит на

линии плоскости основания. Для нахождения радиуса описанного шара можно, например, воспользоваться тем, что $R = \frac{L}{2H}$, где

L — длина бокового ребра пирамиды, а H — ее высота.

2. $\arctg \left[\sin \frac{\alpha}{2} \right]$.

Var. 4. 1. $\sqrt{2}$; 2. 676π .

Var. 5. 1. На рисунке 22 изображена пирамида $MABCD$, $ABCD$ — квадрат, $MC \perp ABC$. Центр описанного шара лежит на середине O ребра AM (в точке пересечения перпендикуляра к плоскости основания, проведенного через центр O_1 квадрата, и серединного перпендикуляра OK к ребру MC). Пусть сторона квадрата a . Тогда $AC = a\sqrt{2}$, C — другой стороны, $AC = 2R \cos 30^\circ = R\sqrt{3}$, $a\sqrt{2} = R\sqrt{3}$. Основание

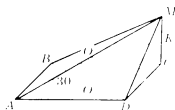


Рис. 22

$$a = \frac{R\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, MC = a\sqrt{2} \cdot \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, MD = \sqrt{a'^2 + \frac{2a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$$

$$S = MC \cdot CD + MD \cdot AD = \frac{a^2 \sqrt{2}}{\sqrt{3}} + \frac{a^2 \sqrt{5}}{\sqrt{3}} = \frac{a^2}{\sqrt{3}} (\sqrt{5} + \sqrt{2}) = \frac{2R^2}{2\sqrt{3}} (\sqrt{5} + \sqrt{2}) = \frac{R^2 \sqrt{3}}{2} (\sqrt{5} + \sqrt{2}).$$

Ответ, $\frac{R^2 \sqrt{3}}{2} (\sqrt{5} + \sqrt{2})$.

2. $\frac{1}{4}(a+b)\sqrt{3}$. Указание. Апофема рассматриваемой пирамиды равна сумме апофем ее основания.

Var. 6. 1. Пусть $MABC$ — правильная трехугольная пирамида, $MO_1 \perp ABC$. Опустим из точки O_1 перпендикуляр OK на ребро AC и соединим точки M и K ; MKO_1 — линейный угол двугранного угла, который образуется боковой гранью с плоскостью основания. Центр шара лежит в точке O пересечения биссектрисы KO этого линейного угла с высотой пирамиды MO_1 . Пусть α — из условия $\frac{OO_1}{OM} = \frac{1}{3}$. Из свойств биссектрисы угла треугольника

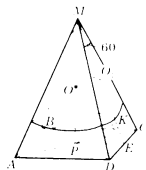


Рис. 23

Линия пересечения состоит из четырех равных дуг окружностей, которые получаются при пересечении сферы с гранями пирамиды (рис. 23). Для нахождения радиуса этих окружностей необходимо определить расстояние от центра шара до граней пирамиды. На рисунке

$$PK \perp DMC \text{ и } OO_1 \perp DMC, OO_1 = \frac{1}{2}PK, PK = \frac{MP \cdot PE}{ME},$$

$$ME = \frac{a\sqrt{3}}{2}, PE = \frac{a}{2}, MP = \frac{3a^2}{\sqrt{4} - 1} = \frac{a\sqrt{2}}{2},$$

$$PK = \frac{a\sqrt{2}a - 2}{2 \cdot 2a\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}, OO_1 = \frac{a\sqrt{2}}{4\sqrt{3}}.$$

Радиус окружности

$$MO_1 = \sqrt{MO^2 - OO_1^2} = \sqrt{\frac{2a^2}{16} - \frac{2a^2}{16 \cdot 3}} = \frac{a}{2\sqrt{3}}.$$

Градусная мера каждой из дуг линии пересечения равна 120° .

Тогда $l = \frac{\pi \cdot a \cdot 120}{2\sqrt{3} \cdot 180} = \frac{\pi a}{3\sqrt{3}}$. В таком случае длина линии пересечения равна

$$\frac{4\pi a}{3\sqrt{3}} = \frac{4\pi a\sqrt{3}}{9}.$$

Ответ: $\frac{4\pi a\sqrt{3}}{9}$.

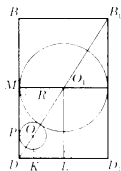
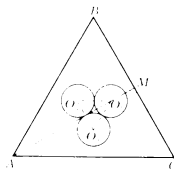


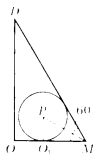
Рис. 24

2. На рисунке 24 изображено диагональное сечение BB_1D_1D куба $ABCD A_1B_1C_1D_1$ вместе с большими кругами вписанных шаров: $O_1LD = OKD$. Пусть радиус малого шара равен x . Тогда $x = \frac{OK}{2}$, $R = \frac{a}{2}$. Отсюда $OK = x\sqrt{2}$; и $R = \frac{a}{2} = \frac{x\sqrt{2}}{2}$.

Из OKD имеем $OD = \sqrt{2x^2 + x^2} = x\sqrt{3}$;



a) $R = 25$



б)

$BD = a\sqrt{3}$, $OD = x + R = x\sqrt{3}$, $\frac{a\sqrt{3}}{2} = x + \frac{a}{2} + x\sqrt{3}$. В таком случае $x = \frac{a(\sqrt{3}-1)}{2(\sqrt{3}+1)} = \frac{a}{2}(2-\sqrt{3})$. Ответ: $\frac{a}{2}(2-\sqrt{3})$.

Вар. 8. 1. $\frac{9a}{2} \arctg \frac{\sqrt{3}}{2}$. Указание. Задача решается аналогично задаче 1 из варианта 7. Плоский угол при вершине пирамиды равен $2 \arctg \frac{\sqrt{3}}{2}$ радиан.

2. На рисунке 25, а показан вид сверху правильной пирамиды $DABC$ с вписанными в нее шаром. На рисунке 25, б изображен треугольник DOM , где DO — высота пирамиды, DM — ее апофема. Окружность с центром в точке P — изображение сечения шара плоскостью DAM . Пусть радиус равен x . Тогда $O_1M = x \operatorname{ctg} 30^\circ = x\sqrt{3}$, $OM = \frac{a}{2\sqrt{3}}$. Треугольник $O_1O_2O_3$ — правильный со стороной, равной $2x$.

$$\text{то } \frac{2x}{\sqrt{3}} = OM = O_1M + OO_1, \quad \frac{a}{2\sqrt{3}} = x\sqrt{3} + \frac{2x}{\sqrt{3}}.$$

$$\text{Отсюда } x = \frac{a}{10}. \quad \text{Ответ: } \frac{a}{10}.$$

C-13

$$\text{Вар. 1. 1. } 24, \quad 2. 44\sqrt{3}.$$

$$\text{Вар. 2. 1. } 32, \quad 2. 54\sqrt{3}.$$

$$\text{Вар. 3. 1. } \frac{d^2\sqrt{2}}{8}, \quad 2. 24\sqrt{3}.$$

$$\text{Вар. 4. 1. } a\sqrt{2}, \quad 2. 40.$$

Вар. 5. 1. Пусть диагонали основания пересекаются в точке O . В плоскости DBB_1 проводим через точку O прямую, параллельную DB_1 , до пересечения с ребром BB_1 в точке E . Эту точку соединим с вершинами A и C . Сечение AEC искомого. Из точки B опускаем перпендикуляр BK на AC и точку K соединим с точкой E : $EKB = 45^\circ$, $BE = BK = \frac{24}{5}$, $BB_1 = 2BE = \frac{48}{5}$, $V = 6 \cdot 8 \cdot \frac{48}{5} = 460,8$. Ответ. 460,8.

2. $a' = \sqrt{2} \cos 2\alpha$. Указание. На вершине C необходимо опустить перпендикуляр CK на AB . Легко доказать, что $CK \perp AA_1B_1$. В таком случае $\angle CB_1K = \alpha$. Дальнейшее решение очевидно.

Вар. 6. 1. $\frac{216\sqrt{5}}{2}$, 2. $\frac{h^3 \operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}{2 \cos^2 \beta}$. Указание. Задачу решаются аналогично задачам из варианта 5.

Вар. 7. 1. На рисунке 26 показано сечение параллелепипеда указанной плоскостью. $BK \perp EK$, $\angle B_1KB = 45^\circ$. Так как R и T — середины сторон AD и CD , то легко получить $BE = 9$, $BF = 12$. В таком случае $EF = 15$ и $BK = \frac{BE \cdot BF}{EF} = \frac{36}{5}$, $BB_1 = \frac{36}{5}$, $V = 6 \cdot 8 \cdot \frac{36}{5} = 345,6$. Ответ. 345,6.

2. Построим треугольную призму $ABC A_1 B_1 C_1$ до прямоугольного параллелепипеда $ADBC A_1 D_1 B_1 C_1$ (рис. 27). В таком случае угол между AC_1 и B_1C равен углу D_1AC_1 . По условию $\angle D_1AC_1 = \arccos \frac{3\sqrt{2}}{10}$. Пусть $AC = x$, тогда $AC_1 = \sqrt{x^2 + 9}$, $DC = AB = \sqrt{x^2 + 16}$ и $AD_1 = 5$. По теореме косинусов имеем:

$$x^2 + 16 = 25 + x^2 + 9 - 2 \cdot 5 \cdot \sqrt{x^2 + 9} \cdot x^2 \cdot \frac{3\sqrt{2}}{10};$$

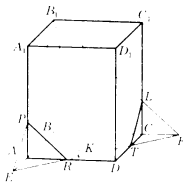


Рис. 26

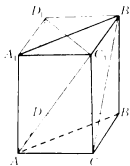


Рис. 27

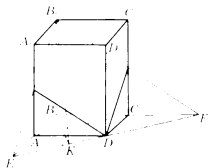


Рис. 28

параллельна диагонали основания AC , $BK = EF$, $\angle BKB_1 = 60^\circ$, $EB = 10$, $BF = 24$. Тогда $EF = 26$.

$$BK = \frac{BE \cdot BF}{EF} = \frac{120}{13}, \quad BB_1 = \frac{120 \times 3}{13}, \quad V = \frac{1}{6} \cdot 12 \cdot \frac{120 \times 3}{13} = \frac{7200 \times 3}{13}.$$

Ответ: $\frac{7200 \times 3}{13}$.

2. Поместим призму в прямоугольную систему координат с началом в вершине C . Пусть CA принадлежит оси Ox , CB — оси Oy и CC_1 — оси Oz . Тогда $A(3; 0; 0)$, $B(0; 6; 0)$, $P(0; 3; 2)$, $M(1; 2; 0)$ — точка пересечения медиан; $\vec{MP} = (1; 1; 2)$. Если φ — угол между $\vec{MP}$ и плоскостью xOz (грань AA_1CC_1 принадлежит этой плоскости), то

$$\sin \varphi = \frac{|\vec{MP} \cdot \vec{j}|}{|\vec{MP}| \cdot |\vec{j}|}, \quad \text{где } \vec{j} = (0; 1; 0); \quad |\vec{MP}| = \sqrt{1}; \quad |\vec{j}| = 1;$$

$$|\vec{MP} \cdot \vec{j}| = |1 + 1 + 2| = \sqrt{2 + 2^2} = \sqrt{6}; \quad \frac{1}{\sqrt{2 + 2^2}} = \frac{1}{\sqrt{6}};$$

$$\sqrt{3} = \sqrt{2 + 2^2}; \quad 2^2 = 1; \quad 2 = 1; \quad 2 = 0.$$

Тогда $CC_1 = 2$, $V = \frac{1}{6} \cdot 3 \cdot 6 \cdot 2 = 18$. Ответ: 18.

C-14

Вар. 1. 1. $768\sqrt{3}$, 2. $3\pi R^2$.

Вар. 2. 1. 125, 2. 3468π .

Вар. 3. 1. $\frac{576\sqrt{3}}{5}$, 2. $\frac{16000\pi}{729}$.

Вар. 4. 1. 36, 2. $\frac{1024\pi}{27}$.

$$16 = 34 - 3 \times 2 \times 9 \times x = 1;$$

$$3 \times 2 \times 9 \times x = 18;$$

$$\sqrt{9 \times x^2} = 3 \times 2; \quad 9 \times x^2 = 18;$$

$$x = 9; \quad x = 3;$$

$$S = \frac{1}{2} \times 3 \times 4 = 6$$

$$\text{и } 3 \times 6 = 18.$$

Ответ: 18.

Вар. 8. 1. Серение показано на рисунке 28. Линия пересечения EF с плоскостью основания

Вар. 5. 1. $\frac{441 \times 143}{2}$. Указание. Необходимо показать, что треугольник B_1FE прямоугольный с прямым углом BFE .

2. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{4\pi \cdot 3 \times 3}{8\pi \cdot 3 \times 3}$. Указание. Объем меньшей отсеченной части равен $\frac{1}{3}$ от разности объемов цилиндра и правильной треугольной призмы, вписанной в этот цилиндр.

Вар. 6. 1. $\frac{9 \times 2}{2}$. 2. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{2\pi \cdot 3 \times 3}{10\pi \cdot 3 \times 3}$.

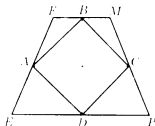


Рис. 29

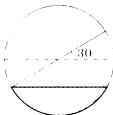


Рис. 30

Вар. 7. 1. На рисунке 29 показан вид сверху на куб и описанную около него призму. Пусть x — длина ребра куба, AC — средняя линия трапеции, $AC = x \times 2$. Высота трапеции $BD = x \times 2$. $S_{\text{осн.}} = x \times 2 \cdot x \times 2 = 2x^2$. Высота призмы равна x .

$$V_1 = 2x^2 \cdot x = 2x^3.$$

Очевидно, что

$$2x \times 2 = a + b, \quad x = \frac{a + b}{2 \times 2}.$$

$$V = \frac{(a + b)^2}{2} = \frac{(a + b)^2 \times 2}{16 \times 2} = \frac{16}{16} = 1.$$

Ответ. $\frac{16}{16}$.

2. На рисунке 30 заштрихована та часть жидкости, которая останется после поворота корыта на 30° . Пусть радиус основания цилиндра R , а его высота H . Тогда объем оставшейся части жидкости равен

$$R \cdot H (4\pi - 3 \times 3).$$

12

Этот результат был получен при решении задачи 1 из варианта 5. Объем вылившейся жидкости

$$M = \frac{\pi R^2 H}{2} - \frac{R^2 H (4\pi - 3 \times 3)}{12} = \frac{R^2 H}{12} (2\pi - 3 \times 3).$$

$$M = \frac{R^2 H (2\pi - 3 \times 3)}{12} = \frac{2\pi \cdot 3 \times 3}{6\pi} = \frac{1}{3} \times 3 = 0,61.$$

$$V = \frac{1}{2} \pi R^2 H = \frac{6\pi}{3} = 2\pi.$$

Ответ. 0,61.

Вар. 8. 1. Очевидно, что плоскость сечения пересечет грань, которая проходит через сторону основания AF (рис. 31). Пусть $KF = x$ и сторона основания a . Необходимо учесть, что объемы призм с одинаковой высотой относятся друг к другу как площади их оснований. Плоскость сечения делит призму на две призмы. Объем призмы с основанием $KDEF$ составляет $\frac{1}{4}$ от объема всей призмы:

$$S_{KDEF} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2} x \cdot a \sqrt{3}; S_{ABCD} = \frac{3a^2 \sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Тогда } \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2} x \cdot a \sqrt{3} = \frac{1}{4} \cdot \frac{3a^2 \sqrt{3}}{2}.$$

Отсюда находим, что

$$x = \frac{a}{4} \text{ и } KD = \frac{a^2}{16} + 3a^2 = \frac{49a^2}{4}.$$

$S_{KDEF} = KD \cdot h$, где h — высота призмы;

$S_{KDEF} = \frac{49ah}{4}$. По условию $ah = Q$. В таком

случае $S_{KDEF} = \frac{49}{4} Q$. Ответ, $\frac{49}{4} Q$.

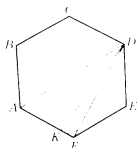


Рис. 31

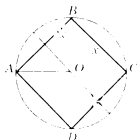


Рис. 32

2. На рисунке 32 показан вид сверху на два данных цилиндра. Пусть диаметр основания и высота вписанного цилиндра равны x и пусть радиус основания большого цилиндра R . Очевидно, что высота этого цилиндра равна x . Тогда его объем $V_1 = \pi R^2 x$.

$$V_2 = \pi \frac{x^2}{4} \cdot x = \frac{\pi x^3}{4}.$$

Но $x = R\sqrt{2}$. Тогда $V_1 = \pi R^3 \sqrt{2}$ и $V_2 = \frac{\pi R^3 \sqrt{2}}{2}$. В таком случае

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{2}. \text{ Ответ, } 1:2.$$

C—15

Вар. 1. 1. $\frac{375}{8}$. **2.** 600.

Вар. 2. 1. $120\sqrt{3}$. **2.** 600.

Вар. 3. 1. $\frac{a^2 b \sqrt{2}}{4}$. **2.** $120\sqrt{2}$.

Вар. 4. 1. $\frac{abc \sqrt{2}}{2}$. **2.** $250\sqrt{3}$.

Вар. 5. 1. Пусть в наклонной треугольной призме $ABC A_1 B_1 C_1$ основанием служит правильный треугольник ABC и пусть $\angle A_1 AC' = \angle A_1 AB = 45^\circ$. Тогда легко доказать, что грань $CC_1 B_1 B$ — квадрат. Обозначим длину каждого ребра через x . Тогда

$$S_{AA_1 B_1 B} = S_{AA_1 C_1 C} = \frac{x^2 \sqrt{2}}{2}, \text{ и } S_{CC_1 B_1 B} = x^2.$$

По условию $x^2 + 2 \frac{x^2 \sqrt{2}}{2} = 4(1 + \sqrt{2})$. Отсюда $x = 2$. Зная длину ребер призмы, легко найти ее высоту, которая равна $\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot S = \sqrt{3}$.

В таком случае $V_{\text{призм}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{3} = 2$.

Ответ: 2.

2. Расстояние от бокового ребра до диагонали противоположной грани равно расстоянию от базового ребра до этой грани. Построим перпендикулярное сечение призмы. Пусть d — расстояние от базового ребра до противоположащей боковой грани, m — сторона перпендикулярного сечения, противоположащая этому базовому ребру, и l — базовое ребро призмы.

$$V = S_{\text{бок. грани}} \cdot l = \frac{1}{2} d m l = \frac{1}{2} d Q,$$

где Q — площадь боковой грани. Тогда $V = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 40 = 100$.

Ответ: 100.

Вар. 6. 1. Пусть в наклонной треугольной призме $ABC A_1 B_1 C_1$ основанием служит прямоугольный треугольник ABC ($\angle C = 90^\circ$) и пусть плоскость грани $AA_1 C_1 C$ перпендикулярна к плоскости основания. В таком случае можно доказать, что $CC_1 B_1 B$ — квадрат и высота призмы $A_1 O$ проектируется на сторону основания AC . Обозначим равные ребра призмы через x . Тогда $A_1 O = \frac{x \sqrt{3}}{2}$. Опустим из точки O перпендикуляр OK на AB и соединим точки K и A_1 . В таком случае $A_1 K \perp AB$, $AO = \frac{3}{2}$,

$$OK = \frac{x}{2\sqrt{2}}, A_1 K = \sqrt{x^2 - \frac{x^2}{8}} = \frac{x\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}.$$

$$S_{AA_1 B_1 B} = \frac{x\sqrt{7}}{2\sqrt{2}} \cdot x\sqrt{2} = \frac{x^2 \sqrt{7}}{2}, S_{AA_1 C_1 C} = \frac{x^2 \sqrt{3}}{2}, S_{CC_1 B_1 B} = x^2.$$

По условию $\frac{x^2 \sqrt{7}}{2} + \frac{x^2 \sqrt{3}}{2} + x^2 = 2(1 + \sqrt{7} + \sqrt{3} + 2)$. Отсюда $x = 2$.

$$V = \frac{x^2}{2} \cdot \frac{x\sqrt{3}}{2} = \frac{x^3 \sqrt{3}}{4}.$$

Так как $x = 2$, то $V = 2\sqrt{3}$.

Ответ: $2\sqrt{3}$.

2. $30\sqrt{2}$, X — значение. Задача решается аналогично задаче 2 из варианта 5.

Вар. 7. 1. На рисунке 33 MPK — перпендикулярное сечение призмы. $V_{MPK} = S_{MPK} \cdot AA_1$. Для нахождения площади перпендикулярного сечения необходимо найти угол PMK , т. е. угол между скрещивающимися прямыми EB и FC , где $EB \perp AA_1$ и $FC \perp AA_1$.
 $EA = EB = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $FC = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $FA = \frac{a}{2}$. Если φ — искомый угол, то

$$\cos \varphi = \frac{\vec{EB} \cdot \vec{FC}}{|\vec{EB}| \cdot |\vec{FC}|}.$$

$$\begin{aligned} \vec{EB} &= \vec{EA} + \vec{AB}, \vec{FC} = \vec{FA} + \vec{AC}, \vec{EB} \cdot \vec{FC} = (\vec{EA} + \vec{AB}) \cdot (\vec{FA} + \vec{AC}) \\ &= \vec{EA} \cdot \vec{FA} + \vec{AB} \cdot \vec{FA} + \vec{EA} \cdot \vec{AC} + \vec{AB} \cdot \vec{AC} \\ &= \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{a}{2} + a \cdot \frac{a}{2} \cdot \sqrt{2} + \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot a + \frac{1}{2} \cdot a \cdot a \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{a^2}{2} + \frac{a^2\sqrt{2}}{4} + \frac{a^2}{4} (2 + \sqrt{2}). \end{aligned}$$

Отметим, что $\vec{FA} \cdot \vec{AB} = 135$ и $\vec{EA} \cdot \vec{AC} = 120$:

$$\cos \varphi = \frac{a^2 (2 + \sqrt{2})}{4 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{3}}; \quad \sin \varphi = \sqrt{1 - \frac{3}{4}} = \frac{2\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\begin{aligned} S_{MPK} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{a \cdot \sqrt{6}}{8} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{a}{4} \cdot \sqrt{2}; \\ V &= \frac{a^2 b \sqrt{2}}{4}. \end{aligned}$$

Ответ, $\frac{a^2 b \sqrt{2}}{4}$.

2. По условию BB_1D_1D — прямоугольник. Из этого следует, что $BD \perp DD_1$, а так как $AA_1 \perp DD_1$, то $BD \perp AA_1$, а $BD \perp AC$ по условию. Отсюда плоскость ABC перпендикулярна плоскости диагонального сечения AA_1C_1C . Поэтому высота A_1O призмы лежит в плоскости этого сечения.

$$\begin{aligned} A_1O &= \frac{S_{AA_1C_1C}}{AC} = \frac{30}{5} = 6, \\ S_{AA_1C_1C} &= \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5 = 10; \quad V = S_{AA_1C_1C} \cdot A_1O = 60. \end{aligned}$$

Ответ, 60.

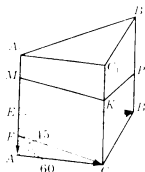


Рис. 33

Вар. 8. 1. Пусть A_1O — высота пирамиды. Опустим из точки O перпендикуляры OE и OF соответственно на AC и AB . Тогда $A_1E \perp AC$ и $A_1F \perp AB$. По условию $A_1E = 7$ и $A_1F = 20$. Продлим EO до пересечения с AC в точке K . Получим прямоугольный треугольник AFE , где $\angle FEA = 30^\circ$. Из треугольника AA_1E имеем, что $AE = 21$, а из треугольника AA_1F получим, что $AF = 15$. Тогда из прямоугольного треугольника AFE получим, что $AK = 30$ и $EK = 6$. Из треугольника OEK имеем $OE = EK \cdot \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$. Теперь можно найти A_1O :

$$A_1O = \sqrt{A_1E^2 - OE^2} = \sqrt{49 - 12} = \sqrt{37};$$

$$S_{\text{бок.}} = \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 50 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 500\sqrt{3}; V = 500\sqrt{3} \cdot \sqrt{37} = 500\sqrt{111}.$$

Ответ. $500\sqrt{111}$.

2. Диагональное сечение BB_1D_1D разбивает параллелепипед на две равные пирамиды. Исходя из условия можно доказать, что BB_1D_1D — квадрат. Пусть диагонали квадрата пересекаются в точке O . Опустим из точки O перпендикуляр OK на AA_1 и точку K соединим с точками B и D . Легко доказать, что BKD — перпендикулярное сечение пирамиды $ABDA_1B_1D_1$, $BD = a\sqrt{2}$.

$$OK = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{a\sqrt{6}}{6}; S_{\text{бок.}} = \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{6} = \frac{a^2\sqrt{3}}{6};$$

$$V_{\text{прав.}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{6} \cdot a = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}.$$

Тогда $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. Ответ. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

С—16

Вар. 1. 1. $\frac{2h^2\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha}{27}$, 2. $\frac{a^3\sin^2\alpha\operatorname{tg}\beta}{3}$.

Вар. 2. 1. $\frac{d^3\sqrt{2}\operatorname{tg}\alpha}{24}$, 2. $\frac{a^3}{6} \cdot \sin\alpha \cdot \cos\frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg}\beta$.

Вар. 3. 1. $\frac{1}{3}h^3 \cdot \frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}$, 2. $\frac{5}{3}$.

Вар. 4. 1. $\frac{h^3\sqrt{3}\sin^2\alpha}{2\cos\alpha+1}$, 2. $72\sqrt{3}$.

Вар. 5. 1. $\frac{d^3(1+\sin 2\alpha)}{3\sin^2\beta \cdot \cos\beta \cdot \sin 2\alpha}$.

2. Пусть $DABC$ — правильная треугольная пирамида и DO — ее высота. Построим высоту BE основания и из точки E опустим

перпендикуляр EF на ребро DB . Точку F соединим с точками A и C : $\angle AFC$ — линейный угол двугранного угла, образованного двумя смежными боковыми гранями. Из подобия треугольников DOB и EFB следует, что $\frac{DO}{EF} = \frac{OB}{FB}$. Отсюда $DO = \frac{EF \cdot OB}{FB}$.

$EF = \frac{a}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$, $OB = \frac{a}{\sqrt{3}}$. Из треугольника EFB следует, что

$$FB = \frac{3a^2}{\sqrt{4}} = \frac{a^2}{4} \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{a^2}{2} \sqrt{3 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

$$a \cdot \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$$

Тогда DO

$$= \frac{a \cdot \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3} \sqrt{3 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2}}}.$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{a \sqrt{3}}{\sqrt{4}} = \frac{a \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3} \sqrt{3 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2}}} = \frac{a \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}}{12 \sqrt{3 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2}}}.$$

$$a^2 \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \quad a^2 \cos \frac{\alpha}{2}$$

Ответ.

$$\frac{12 \sqrt{3 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2}}}{12 \sqrt{4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}} = 1.$$

Вар. 6. 1. $\frac{2d^2}{3 \sin \beta \cos \beta \sin \alpha} = 2$. $\frac{a^2 \sqrt{2 \cos \frac{\alpha}{2}}}{6 \sqrt{\cos \alpha}}$. Указание.

Задача решается аналогично задаче 2 из варианта 5.

Вар. 7. 1. Если боковые грани имеют равные площади, то высоты этих граней равны и вершина M равноудалена от прямых, на которых лежат стороны оснований. Так как в основании лежит правильный треугольник, то возможны три различных варианта, которые показаны на рисунке 34.

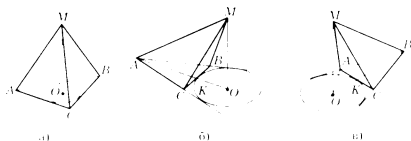


Рис. 34

а) Точка O — центр вписанной окружности:

$$AO = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, MO = \sqrt{2 - \frac{2}{3} - \frac{2}{3}} = S_{\text{об}} = \frac{\sqrt{3}}{2}; V = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{3}.$$

б) Точка O — центр описанной окружности. Радиус этой окружности может быть вычислен по формуле $r = \frac{2S}{a+b+c}$, S — площадь треугольника, a , b и c — его стороны. Тогда

$$r = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2},$$

$$AO = AK + KO = \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2} = \sqrt{6} = AM.$$

Следовательно, этот вариант не реализуется.

в) Точка O — центр вневписанной окружности: $AK = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $r = \frac{\sqrt{6}}{2}$, $AO = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{3}{2} = \sqrt{2} = AM$. Следовательно, и этот вариант не реализуется.

Ответ. $\frac{1}{3}$.

2. Покажем, что точки M , P и C лежат на одной прямой (рис. 35).

$$\vec{MP} = \vec{AP} - \vec{AM} = \frac{1}{2} \vec{AF} - \frac{1}{3} \vec{AB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} (\vec{AB} + \vec{AC}) - \frac{1}{3} \vec{AB} = \frac{1}{4} \vec{AB} + \frac{1}{4} \vec{AC} = \frac{1}{3} \vec{AB} - \frac{1}{4} \vec{AC} = \frac{1}{12} \vec{AB}, \quad (1)$$

$$\vec{PC} = \vec{AC} - \vec{AP} = \vec{AC} - \frac{1}{2} \vec{AF} = \frac{1}{4} \vec{AB} - \frac{1}{4} \vec{AC} = \frac{3}{4} \vec{AC} - \frac{1}{4} \vec{AB} \quad (2)$$

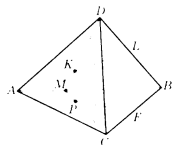


Рис. 35

Исходя из (1) и (2), имеем, что $\vec{PC} = 3\vec{MP}$. Это и означает, что указанные три точки лежат на одной прямой. Аналогично и точки M , K и D лежат на одной прямой. В таком случае речь идет о плоскости MDC , которая делит тетраэдр на две части, объемы которых относятся как 1 : 2.

Ответ. 1 : 2.

Вар. 8. $1, \sqrt{105}; 9; 3\sqrt{11}$. Указание. Задача решается аналогично задаче 1 из варианта 7, но в этом случае реализуются все три различные возможности.

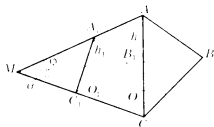


Рис. 36

2. Рассмотрим пирамиду, изображенную на рисунке 36. В пирамиде $MA_1B_1C_1$ площадь основания $S_1 = \frac{1}{2} MC_1 \cdot MB_1 \cdot \sin \alpha$. Высота пирамиды $h_1 = MA_1 \cdot \sin \varphi$.

$$V_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot MC_1 \cdot MB_1 \cdot \sin \alpha \cdot MA_1 \cdot \sin \varphi = \frac{1}{6} MC_1 \cdot MB_1 \cdot MA_1 \cdot \sin \alpha \cdot \sin \varphi.$$

Аналогично для пирамиды $MABC$

$$V = \frac{1}{6} \cdot MC \cdot MB \cdot MA \cdot \sin \alpha \cdot \sin \varphi.$$

Тогда $\frac{V_1}{V} = \frac{MA_1 \cdot MB_1 \cdot MC_1}{MA \cdot MB \cdot MC}$. В нашем случае $\frac{V_1}{V} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 2}{4 \cdot 6 \cdot 5} = \frac{1}{20}$.

Ответ: 1 : 19.

C-17

Вар. 1. 1. $\frac{256\pi \times 3}{9}$, 2. $\frac{\pi}{4}$.

Вар. 2. 1. 36π , 2. $\frac{\pi}{2}$.

Вар. 3. 1. $\frac{2}{3}\pi \times 2$, 2. 100π .

Вар. 4. 1. $\frac{16\pi \times 2}{3}$, 2. $\frac{18\pi \times 11}{5}$.

Вар. 5. 1. $\pi a^2 \sin^2 2\beta \cdot \cos \beta \sin \frac{\alpha}{2}$,
2. $12 \sin^2 \left(\beta + \frac{\alpha}{2} \right)$.

2. 60. Указание. Необходимо доказать, что большее основание трапеции является диаметром основания конуса.

$$\text{Вар. 6. 1. } \frac{144\pi}{5}.$$

2. 15. Указания не. Необходимо учесть, что суммы противолежащих сторон трапеции должны быть равны. Если меньшую из боковых сторон принять за x , то $\sqrt{x^2 + 4} + x = 6$. Отсюда $x = \frac{8}{3}$ и радиус основания конуса равен $\frac{4}{3}$. Остаточное решение очевидно.

Вар. 7. 1. По условию сечение наибольшей площади не совпадает с осевым сечением. Значит, угол между образующими в этом сечении прямой. Пусть сечением является треугольник AMB , где M — вершина конуса. Опустим из центра основания O перпендикуляр OK на AB и точки K и M соединим. $\angle MKO = \arccos \frac{1}{\sqrt{3}}$. Треугольник AMB равнобедренный и прямоугольный, $MK = \frac{L\sqrt{2}}{2}$, $MO = MK \cdot \sin \left[\arccos \frac{1}{\sqrt{3}} \right] = \frac{L\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{3}} = \frac{L\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{L}{\sqrt{3}}$. Радиус основания конуса $R = BO = \sqrt{L^2 - \frac{L^2}{3}} = \frac{L\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$; $OK = \frac{L\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{L\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}$; $\cos \angle KOB = \frac{OK}{OB} = \frac{1}{2}$. Следовательно, $\angle AOB = 120^\circ$ и AB — сторона правильного треугольника. В таком случае треугольник AMB есть грань правильной треугольной пирамиды, вписанной в этот конус, причем боковые ребра этой пирамиды взаимно перпендикулярны. Объем пирамиды равен $\frac{L^3}{6}$. Объем конуса равен

$$\frac{1}{3} \pi R^2 H = \frac{1}{3} \pi \cdot \frac{2L^2}{3} \cdot \frac{L}{\sqrt{3}} = \frac{2L^3 \sqrt{3} \pi}{27}.$$

Объем отсеченной части

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{2L^2 \sqrt{3}}{27} \cdot \frac{L}{6} = \frac{L^3}{162} (4\pi \sqrt{3} - 9).$$

$$\text{Ответ. } \frac{L^3}{162} (4\pi \sqrt{3} - 9).$$

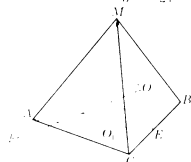


Рис. 37

2. На рисунке 37 FM , FO и MO соответственно образующая, высота и радиус основания конуса. Зная длины сторон треугольника CMR , можно найти радиус описанной около него окружности: $MO = \frac{25}{4}$.

На треугольнике AME , где $AM = 10$, $ME = 8$ и $AE = 6\sqrt{3}$,

находим косинус угла $\angle AME$: $108 = 100 + 64 = 2 \cdot 80 \cos \angle AME$,
 $\cos \angle AME = \frac{7}{20}$. Тогда

$$\operatorname{tg} \angle AME = \frac{3\sqrt{39}}{7}, \quad FO = MO \cdot \operatorname{tg} \angle AME = \frac{25 \cdot 3\sqrt{39}}{4} = \frac{75\sqrt{39}}{28},$$

$$V = \frac{1}{3} \pi \cdot \frac{625}{16} \cdot \frac{75\sqrt{39}}{28} = \frac{15625\pi\sqrt{39}}{118}.$$

Ответ: $\frac{15625\pi\sqrt{39}}{118}$.

Var. 8. 1. $\frac{H}{18} (8\pi + 3\sqrt{3})$. 2. $\frac{15625\pi\sqrt{15}}{1344}$. Указание. Задачи

решаются аналогично задачам из варианта 7.

C—18

Var. 1. 1. 456. 2. $\frac{26\pi\sqrt{3}}{3}$.

Var. 2. 1. $168\sqrt{3}$. 2. $\frac{560\pi}{3}$.

Var. 3. 1. $(a^2 + b^2)\sqrt{2}$. 2. 576π .

Var. 4. 1. $\frac{7m^3\sqrt{2}}{6}$. 2. 8064π .

Var. 5. 1. Построим усеченную пирамиду до полной пирамиды, частью которой является данная усеченная. Можно найти, что объем такой пирамиды равен $108\sqrt{3}$. Плоскость верхнего основания усеченной пирамиды делит объем полной пирамиды в отношении 1 : 27 (стороны основания относятся как 1 : 3). В таком случае объем усеченной пирамиды $V = \frac{26}{27} \cdot 108\sqrt{3} = 104\sqrt{3}$.

Ответ: $104\sqrt{3}$.

2. $54\pi\sqrt{3}$.

Var. 6. 1. 268,8. Указание. Задача решается аналогично задаче 1 из варианта 5. Объем полной пирамиды равен $\frac{1536}{5}$, а объем усечен

ной пирамиды $V = \frac{7}{8} \cdot \frac{1536}{5} = 268,8$.

2. $\frac{32000\pi\sqrt{3}}{3}$.

Var. 7. 1. На рисунке 38 плоскости EA_1P и FB_1I перпендикулярны к плоскости основания. Многоугольник AA_1DBB_1C разбит

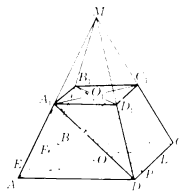


Рис. 38

призму EA_1FEB_1I и две равные пирамиды A_1AEPD и B_1BCLF . Пусть высота усеченной пирамиды равна h . Тогда объем призмы $V = \frac{1}{2}abh$, а объем пирамиды $V' = \frac{1}{3}a \cdot \frac{a+b}{2} \cdot h = \frac{1}{2}a(a+b)h$. Объем многогранника AA_1DBB_1C

$$V_1 = V + 2V' = \frac{abh}{2} + \frac{a(a+b)h}{3} = \frac{h}{6}a(b+2a).$$

Объем усеченной пирамиды

$$V = \frac{h}{3}(a^2 + ab + b^2).$$

Объем второго многогранника, который дополняет рассмотренный многогранник до усеченной пирамиды

$$V_2 = \frac{h}{3}(a^2 + ab + b^2) - \frac{h}{6}a(b+2a) = \frac{h}{6}b(a+2b).$$

$$V_1 = \frac{a(b+2a)}{6}, \text{ Ответ, } \frac{a(b+2a)}{6}.$$

$$V_2 = \frac{b(a+2b)}{6}.$$

1.

$$2. \frac{\pi a^3 \sqrt{3}}{6}. \text{ Указание. Объем тела}$$

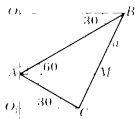


Рис. 39

вращения может быть получен, если из объема усеченного конуса, полученного вращением трапеции $OBCO_1$ вокруг оси l , вычесть объемы конусов, полученных вращением треугольников OBA и O_1CA вокруг той же оси (рис. 39).

$$\text{Вар. 8. 1. } \frac{11}{45}. \text{ Указание. Задача решается аналогично задаче 1 из варианта 7.}$$

$$2. \frac{2\pi a^3}{9}. \text{ Указание. Объем тела вращения может быть получен, если из объ-$$

ема цилиндра, полученного вращением прямоугольника $AEEC$ вокруг оси l , вычесть объемы двух усеченных конусов, полученных вращением трапеций $AEOB$ и $CFOB$ вокруг той же оси (рис. 40). Следует отметить, что $\angle AOC' = 60^\circ$.

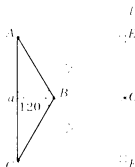


Рис. 40

C—19

$$\text{Вар. 1. 1. } \frac{128\pi}{3}, \quad 2. \frac{4}{9}.$$

$$\text{Вар. 2. 1. } 12\pi, \quad 2. \frac{32}{9}.$$

$$\text{Var. 3. 1. } \frac{52\pi}{3}, \quad 2. 36\pi.$$

$$\text{Var. 4. 1. } \frac{50\pi}{3}, \quad 2. \frac{62500\pi}{81}.$$

Var. 5. 1. На рисунке 41 изображено осевое сечение рассматриваемой фигуры.

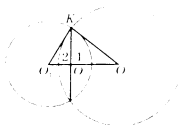


Рис. 41

Высота первого сегмента $h_1 = 13 \frac{5}{8}$. Тогда его объем

$$V_1 = 64\pi \left| 13 \frac{5}{8} \right| \frac{8}{3} = 1984\pi.$$

Высота второго сегмента $h_2 = 20 \frac{16}{4}$. Тогда его объем

$$V_2 = 16\pi \left| 20 \frac{4}{3} \right| \frac{896\pi}{3}.$$

Отсюда объем двойноконического стекла

$$V = 1984\pi + 896\pi = 960\pi.$$

Ответ. 960π .

2. Пусть R — радиус вписанного шара, φ — величина угла между образующей конуса и плоскостью основания. Радиус основания конуса $r = R \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}$. Высота конуса $H = R \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} \cdot \operatorname{tg} \varphi$.

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} \cdot R \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} \cdot \operatorname{tg} \varphi = \frac{\pi R^3 \operatorname{tg} \varphi}{3 \operatorname{tg}^3 \frac{\varphi}{2}} = \frac{2\pi R^3}{3 \operatorname{tg}^3 \frac{\varphi}{2} \left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2} \right)}.$$

$V_{\text{шар}} = \frac{4}{3} \pi R^3$. Исходя из условия, имеем

$$\frac{2\pi R^3}{3 \operatorname{tg}^3 \frac{\varphi}{2} \left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2} \right)} = \frac{9}{4} \cdot \frac{4}{3} \pi R^3.$$

Пусть $\operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2} = a > 0$. Тогда получаем уравнение

$$9a^2 - 9a + 2 = 0,$$

корни которого $a_1 = \frac{1}{3}$, $a_2 = \frac{2}{3}$.

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{1}{3} \text{ или } \varphi = 60^\circ \text{ или } \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{\sqrt{6}}{3} \text{ или } \varphi = 2 \arctg \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Ответ. 60° или $2 \arctg \frac{\sqrt{6}}{3}$.

Вар. 6. 1. $\frac{1441\pi}{3}$. Указание. Необходимо учесть, что центр шаров лежит по одну сторону от плоскости окружности, по которой пересекаются их поверхности.

2. $\pi - 4 \arctg \frac{1}{2}$ или $\pi - 4 \arctg \frac{\sqrt{3}}{2}$. Указание. Задача решается аналогично задаче 2 на варианте 5.

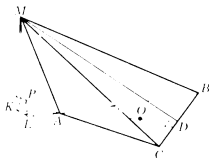


Рис. 12

можно доказать, что $MD \perp AB$, $ML \perp AB$ и $MP \perp AC$; KD

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot \frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{2}{6} \cdot \frac{\sqrt{3}}{6}, KA = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2}{3} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3}, KP = \frac{1}{2} KA$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}. \text{ Из треугольника } MKD \quad MD = \sqrt{\frac{2}{3} - \left| 4 \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{3}{36} \right|} = \frac{7\sqrt{3}}{6}.$$

$$S_{MKD} = \frac{7\sqrt{3}}{12}.$$

$$\text{Из } \triangle MKL \quad ML = MP = \sqrt{\frac{2}{3} - \left| 4 \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{3}{9} \right|} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

$$S_{MKD} = S_{MLD} = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot S = \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{7\sqrt{3}}{12} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{3}.$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{12} \cdot \frac{4}{\sqrt{3}} = R = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot 2 = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 = 3.$$

$$S_{\text{полн}} = 4\pi \cdot 2^2 \cdot 3 = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}.$$

Ответ. $\frac{2\pi}{9\sqrt{3}}$.

2. Объем полного шара $V = \frac{4}{3}\pi(R^3 - r^3)$.

Так как толщина стенок 3 см, то $r = 6$ см. Тогда

$$V = \frac{4}{3}\pi(729 - 216) = 684\pi \text{ см}^3.$$

Вар. 7. 1. Данная пирамида изображена на рисунке 12. В любой тетраэдр можно вписать шар. Радиус этого шара R может быть вычислен по формуле $R = \frac{3V}{S}$, где V — объем тетраэдра, а S — площадь его поверхности. Из точки K опустим перпендикуляр на сторону BC и продолжим сторону AC и AB . Тогда по теореме о трех перпендикулярах

Вар. 3. 1. Можно доказать, что расстояние от точки $A(x_0; y_0; z_0)$ до плоскости $ax + by + cz + d = 0$ может быть вычислено по формуле $d = \frac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

В нашем случае $d = \frac{2 \cdot 3 + 4 \cdot 1}{\sqrt{4^2 + 1^2 + 4^2}} = \frac{2}{3} = R(R-1)$.

Радиус сечения $r = \sqrt{R^2 - d^2} = \frac{\sqrt{5}}{3}$; $S = \frac{5\pi}{9}$. Ответ. $\frac{5\pi}{9}$.

2. Общий вид уравнения плоскости, которая параллельна оси Oz : $ax + by + d = 0$. Так как точки $A(1; 0; -2)$ и $B(0; 3; 1)$ принадлежат этой плоскости, то $\begin{cases} a + d = 0 \\ 3b + d = 0 \end{cases}$. Отсюда $a = -d$, $b = -\frac{d}{3}$.

Тогда имеем $dx + \frac{d}{3}y + d = 0$, и так как $d \neq 0$, то $3x + y + 3 = 0$.

Ответ. $3x + y + 3 = 0$.

Вар. 4. 1. Указание. Необходимо доказать, что расстояние от центра шара $M(3; 2; -4)$ до указанной плоскости равно 6.

2. $y - z - 2 = 0$. Указание. Задача решается аналогично задаче 2 из варианта 3.

Вар. 5. 1. Пусть $A_1(x; y; z)$ — искомая точка и пусть отрезок AA_1 пересекает указанную плоскость в точке P . Вектор, перпендикулярный плоскости, $\vec{n} \parallel (1; 1; -1)$. Так как $AA_1 \perp \alpha$, то $AA_1 = k \cdot \vec{n}$, $AA_1 \parallel (k; k; -k)$. С другой стороны, $AA_1 \parallel (x-1; y-1; z-1)$. Тогда имеем

$$\begin{cases} x-1 = k \\ y-1 = k \\ z-1 = -k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = k+1 \\ y = k+1 \\ z = 1-k \end{cases}$$

Тогда P является серединой отрезка AA_1 и $P \in \left[\frac{k+2}{2}; \frac{k+2}{2}; \frac{2-k}{2} \right]$. Так как точка P принадлежит плоскости α ,

то $\frac{k+2}{2} + \frac{k+2}{2} - \frac{2-k}{2} = 0$. Отсюда $k = \frac{2}{3}$ и $x = \frac{5}{3}$, $y = \frac{5}{3}$, $z = \frac{1}{3}$.

Ответ. $A_1 \left(\frac{5}{3}; \frac{5}{3}; \frac{1}{3} \right)$.

2. Указанная прямая пересекает ось Ox в точке $A(-1; 0; 0)$ и ось Oy в точке $B(0; 1; 0)$. Точки A , B и M определяют плоскость $ax + by + cz + d = 0$. Так как указанные точки принадлежат плоскости, то

$$\begin{cases} -a + d = 0 \\ b + d = 0 \\ a + b - 2c + d = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = d \\ b = d \\ c = \frac{d}{2}. \end{cases}$$

Отсюда следует, что

$$2x - 2y + z + 2 = 0.$$

Ответ. $2x - 2y + z + 2 = 0$.

Вар. 6. 1. Пусть $P(x; y; z)$. Так как точка P лежит на прямой EF , то $\vec{EP} = k \cdot \vec{EF}$, $\vec{EF} = (1; 1; 2)$, $\vec{EP} = (x - 1; y - 2; z - 1)$. Отсюда

$$\begin{cases} x - 1 = k \\ y - 2 = k \\ z - 1 = 2k, \end{cases} \quad \begin{cases} x = k + 1 \\ y = k + 2 \\ z = 2k + 1. \end{cases}$$

С другой стороны, точка P лежит на плоскости, а потому

$$k + 1 - 2(k - 2) + 2k + 1 - 3 = 0 \text{ и } k = 3.$$

$$x = 2$$

В таком случае $y = 5$,

$$z = 5.$$

Ответ. $P(2; 5; 5)$.

2. Пусть искомая плоскость имеет вид $ax + by + cz + d = 0$. Так как плоскость $x - 2y + z - 1 = 0$ и искомая перпендикулярны, то векторы, перпендикулярные этим плоскостям, $\vec{n}_1(a; b; c)$ и $\vec{n}_2(1; 2; 1)$, тоже перпендикулярны между собой. Тогда $a - 2b + c = 0$. Кроме того, координаты данных точек E и F удовлетворяют уравнению плоскости, т.е.

$$a - b + c + d = 0 \text{ и } 2a + b - c + d = 0.$$

Решив полученную систему уравнений, получаем уравнение искомой плоскости $2x + 3y + 4z - 3 = 0$.

Вар. 7. 1. Пусть MO — высота пирамиды. Поместим пирамиду в прямоугольную систему координат: O — начало координат, ось Ox сонаправлена с лучом PA , ось Oy — с лучом AD , а ось Oz — с лучом OM . Найдём уравнение плоскости DMC :

$$D(1; 1; 0); C(1; 1; 0); M(0; 0; 1).$$

Координаты этих точек удовлетворяют уравнению

$$ax + by + cz + d = 0.$$

$$a + b + d = 0$$

Имеем систему уравнений $\begin{cases} a + b + d = 0 \\ c + d = 0 \end{cases}$

$$c + d = 0$$

Отсюда можно получить, что уравнение плоскости имеет вид

$$y + z - 1 = 0.$$

Вектор, перпендикулярный этой плоскости: $\vec{n} \{0; 1; 1\}$. Если φ — искомый угол, то

$$\sin \varphi = \frac{|\vec{AM} \cdot \vec{n}|}{|\vec{AM}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{|\vec{AM}| \cdot 1}{|\vec{AM}| \cdot \sqrt{1+1}} = \frac{1 \cdot 1}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{3};$$

$\varphi = \arcsin \frac{\sqrt{6}}{3}$. Ответ: $\arcsin \frac{\sqrt{6}}{3}$.

2. Так как искомая плоскость должна быть параллельна направлению вектора $\vec{m}$, то в плоскости должна быть прямая, параллельная этому направлению. Для этого найдем третью точку C искомой плоскости как образ точки $A \{1; -1; 1\}$ при параллельном переносе на вектор $\vec{m} \{3; 1; -1\}$: $C \{4; 0; 0\}$. Тогда мы имеем три точки A , B и C , определяющие искомую плоскость. Теперь достаточно лишь записать уравнение этой плоскости.

Ответ: $x - 5y - 2z - 4 = 0$.

Вар. 8. 1. 60°. Указание. Необходимо поместить пирамиду в прямоугольную систему координат и найти уравнение плоскостей AMD и DMC . Тогда если $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ — векторы, перпендикулярные этим плоскостям и φ — искомый угол, то $\cos \varphi = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$.

2. Найдем две точки A и B , принадлежащие линии пересечения плоскостей.

$$1) \text{ Пусть } x = 0. \text{ Тогда } \begin{cases} y + z = 1 = 0 \\ y - 2z = 2 = 0. \end{cases}$$

Отсюда $y = 4$, $z = -3$ и $A \{0; 4; -3\}$.

$$2) \text{ Пусть } z = 0. \text{ Тогда } \begin{cases} 2x - y = 1 = 0 \\ x + y - 2 = 0. \end{cases}$$

Отсюда $x = 1$, $y = 1$ и $B \{1; 1; 0\}$. Плоскость, проходящая через точку M , должна быть перпендикулярна вектору $\vec{AB} \{1; 5; 3\}$. Тогда уравнение плоскости имеет вид

$$1(x - 1) + 5(y - 1) + 3(z - 1) = 0,$$

т. е. $x + 5y + 3z - 9 = 0$. Ответ: $x + 5y + 3z - 9 = 0$.

Работы на повторение

II—1

Вар. 1. 1. 1) Скрещивающиеся; 2) скрещивающиеся; 3) скрещивающиеся. 2. Прямоугольник; $\frac{2a^2}{9}$. 3. 1) 60°; 2) $\arctg \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

$$4. \arcsin \frac{3\sqrt{7}}{7}. \text{ Возможен ответ: } 90^\circ - \arctg \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

5. Для нахождения угла между AB и DC проведем прямую $l \perp AB$ (рис. 14). Угол между DC и l является искомым. Из точки B опустим перпендикуляр BE на l и точку E соединим с точкой D . Легко доказать, что $DE \perp CE$.

$$DE = \sqrt{a^2 + \frac{3a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{7}}{2}; BE = \frac{a\sqrt{3}}{2}; CE = \frac{a}{2}.$$

Тогда $\arg DE = \frac{DE}{CE} = \sqrt{7}$ и $\arg E = \operatorname{arctg} \sqrt{7}$. Ответ: $\operatorname{arctg} \sqrt{7}$.

6. Плоскость CDE $\perp$ AB . Расстояние между прямыми AB и DC равно расстоянию от прямой AB до плоскости CDE . Можно доказать, что оно равно высоте BK треугольника DBE (см. рис. 14).

$$\begin{array}{rcccl} BK & BE \cdot DB & a \times 3 \cdot a \cdot 2 & a \times 21 \\ & DE & 2 \cdot a \times 7 & 7 \end{array}$$

OTR: 08.21.

Вар. 2. 1) Скрещивающиеся; 2) скрещивающиеся;
3) нерасщепляющиеся.

2. Прямоугольная траншея: $\frac{3a \times 5}{8}$.

3. 1) angle 2; 2) 90.

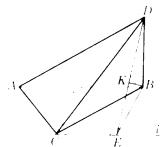
4. 30 ; 5. 60 ; 6. $\frac{a \times 3}{3}$. Укажите, задачи 5 и 6 решаются абсолютно задачам 5 и 6 из варианта 1.

Вар. 3. **1.** 1) Скрещивающиеся; 2) скрещивающиеся;
3) параллельные. **2.** Равнобедренная трапеция: $3a^2 \sqrt{3}$.

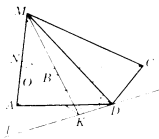
3. 1) $\arctg \frac{\sqrt{3}}{9}$; 2) $\arctg \frac{2\sqrt{3}}{3}$; 4. 45°.

5. Все необходимые построения показаны на рисунке 45.

$OK = \frac{3a\sqrt{2}}{4}$; $MO = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; $MK = \frac{3a^2}{4} + \frac{18a^2}{16} = \frac{a\sqrt{30}}{4}$; $KD = \frac{a\sqrt{2}}{4}$;



Illeg. *Illeg.*

 1.46×10^{-5}

$$\operatorname{tg} MDK = \frac{MK}{KD} = \frac{a \times 30 + 4}{1 + a \times 2} \times 15; \quad MDK = \operatorname{arctg} \times 15.$$

Ответ. $\operatorname{arctg} \times 15$.

6. Расстояние между BC и MD равно высоте BK треугольника AMB . Необходимо учесть, что $BC \perp AMD$, а BK есть расстояние между BC и плоскостью AMD , т. е. расстояние между указанными скрещивающимися прямыми.

Ответ. $\frac{a \times 3}{2}$.

Вар. 4. 1. 1) Скрещивающиеся; 2) скрещивающиеся; 3) скрещивающиеся.

2. Равнобедренный треугольник; $\frac{a^2 \times 15}{16}$.

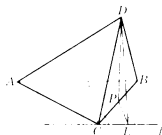


Рис. 16

3. 1) $\operatorname{arctg} 2$; 2) $2 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{6}}{3}$.

4. $\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{39}}{13}$.

5. 1) 90° ; 2) $\operatorname{arcsin} \frac{\sqrt{15}}{4}$. Указание. См. построения, данные на рисунке 16.

6. $\frac{a \times 16}{1}$.

II-2

Вар. 1. 1) $\frac{V_1}{V_2} = \frac{11}{1}$; 2) $8(13 + \sqrt{34})$. Указание. Целесообразно построить перпендикулярное сечение призмы и находить площадь боковой поверхности как произведение периметра перпендикулярного сечения на боковое ребро; 3) $\operatorname{arcsin} \frac{3\sqrt{2}}{10}$.

Вар. 2. 1) $\frac{V_1}{V_2} = \frac{3}{5}$; 2) $8(\sqrt{3} + \sqrt{7})$; 3) $2 \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Вар. 3. 1) $2\sqrt{6} + \sqrt{15}$. Указание. Площадь боковой поверхности целесообразно находить суммированием площадей боковых граней, учитывая, что грань CC_1B_1B является прямоугольником; 2) $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{5}$; 3) $\frac{12\sqrt{5}}{5}$. Указание. Искомым расстоянием является длина высоты треугольника, полученного при построении сечения, указанного в предыдущем пункте.

Вар. 1. 1) $\frac{1}{V_1} = \frac{5}{17}$; Указание. Плоскость сечения пересекет плоскость основания по биссектрисе AF ($O \in AF$), которая делит стороны основания в отношении 5 : 6. В таком случае $S_{\text{сеч.}} = \frac{5}{11} S_{\text{осн.}}$; 2) 128; 3) $\arcsin \frac{32\sqrt{11}}{205}$.

II—3

Вар. 1. 1) $32\pi\sqrt{3}$; 2) $180\sqrt{3} = 311,46^\circ$; 3) $\frac{V_1}{V_2} = \frac{2}{27}$; 4) 256π .

Вар. 2. 1) 64° ; 2) $2 \arctg \frac{1}{\pi} = 35,19^\circ$; 3) да, можно; $\frac{V}{V'} = \frac{2}{3}$; 4) 128π .

Вар. 3. 1) 100° ; 2) $\frac{1625\pi\sqrt{3}}{12}$; 3) 180° , 15 и 5; 4) пусть $ABCD$ — осевое сечение усеченного конуса, $AD = 15$, $BC = 5$, $AB = CD = 10$. Радиус описанного шара равен радиусу описанной около треугольника ABD окружности.

$$BD = \sqrt{100 + 225 - 2 \cdot 10 \cdot 15 \cdot \frac{1}{2}} = 5\sqrt{7}; 5\sqrt{7} = 2R \cdot \sin 60^\circ.$$

Отсюда $R = \frac{5\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$ и $S = 4\pi \frac{25 \cdot 7}{3} = \frac{700\pi}{3}$. Ответ, $\frac{700\pi}{3}$.

Вар. 4. 1) $36\pi\sqrt{2}$; 2) 36° ; Указание. Наибольшую площадь имеет осевое сечение; 3) $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{6}$; 4) пусть треугольник AMB —

осевое сечение конуса. Тогда радиус вписанной окружности является радиусом вписанного в конус шара. Центр шара O делит высоту конуса в отношении $1 : \sqrt{2}$, считая от основания (используем свойство биссектрисы угла треугольника). Отсюда следует, что

$$R = \frac{6}{\sqrt{2} \cdot 4} = \frac{3}{2} (\sqrt{2} = 1), V_{\text{шара}} = \frac{4}{3} \pi R^3 = 288\pi (\sqrt{2} = 1).$$

Ответ, $288\pi (\sqrt{2} = 1)$.

II—4

Вар. 1. 1. 1) $\arccos \frac{\sqrt{3}}{6}$.

2. Очевидно, что $C_1(3; -2; 5)$, $B_1(1; -1; 5)$ и $E(2; 0; 5)$; $\vec{AE} = (1; -2; 3)$, $\vec{CB_1} = (4; 1; 3)$. По условию плоскость перпендикулярна $\vec{CB_1}$. В таком случае φ — искомый угол, тогда

$$\sin \varphi = \frac{|\vec{AE} \cdot \vec{CB_1}|}{|\vec{AE}| \cdot |\vec{CB_1}|},$$

$$\begin{aligned} \frac{|\vec{AE} - \vec{CB}|}{\sin \varphi} &= \frac{1}{3} \cdot \frac{2 \cdot 9}{\sqrt{11} \cdot \sqrt{26}} = 3; \quad |\vec{AE}| = \sqrt{11}; \quad |\vec{CB}| = \sqrt{26}; \\ \sin \varphi &= \frac{3 \cdot \sqrt{91}}{182}; \quad \varphi = \arcsin \frac{3 \cdot \sqrt{91}}{182}. \end{aligned}$$

Ответ: $\arcsin \frac{3 \cdot \sqrt{91}}{182}$.

Вар. 2. 1, 2) Пусть E — середина AC , а F — середина MB .

$$\vec{EF} = \frac{1}{2}(\vec{AM} + \vec{CB}); \quad EF = \frac{1}{4}(\vec{AM} + \vec{CB})^2 = 2 \cdot \vec{AM} \cdot \vec{CB}.$$

В пункте 1) было доказано, что $\vec{AM} \perp \vec{CB}$. Поэтому

$$EF^2 = \frac{1}{4}(4a^2 + a^2 + 0) = \frac{5a^2}{4}.$$

Отсюда $EF = \frac{a \cdot \sqrt{5}}{2}$.

Ответ: $\frac{a \cdot \sqrt{5}}{2}$.

2. Основание пирамиды $ABCD$ лежит в плоскости $z = 2$. Тогда, исходя из условия, следует, что высота пирамиды $H = 3$.
 $\vec{AC} = 2; 4; 0$; $\vec{BD} = 5; 0; 0$; $|\vec{AC}| = 2\sqrt{5}$; $|\vec{BD}| = 5$; $|\vec{AC} + \vec{BD}| = 10$.

Если φ — угол между диагоналями основания, то

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{AC} + \vec{BD}|^2}{|\vec{AC}|^2 + |\vec{BD}|^2} = \frac{1}{5}.$$

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot |\vec{AC}| \cdot |\vec{BD}| \sin \varphi;$$

$$\sin \varphi = \sqrt{1 - \frac{1}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{5} \cdot 5 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = 10.$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot 10 \cdot 3 = 10.$$

Ответ: 10.

Вар. 3. 1. 1) $\arccos \frac{\sqrt{2}}{8}$; 2) $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{3}$, 3) $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{2}$ соответственно. Необходи-

мо куб поместить в прямоугольную систему координат и учесть, что диагональ $\vec{AC}_1$ перпендикулярна к плоскости A_1DB . Тогда если

$$\varphi \text{ — искомый угол, то } \sin \varphi = \frac{|\vec{AC}_1 \cdot \vec{EF}|}{|\vec{AC}_1| \cdot |\vec{EF}|}.$$

Вар. 4. 1. 1) Разложим вектор $\vec{EM}$ по базисным векторам $\vec{AC}$, $\vec{AB}$ и $\vec{AD}$:

$$\begin{aligned}
 EM &= AM - AE = \frac{1}{3}(AB + AC + AD) - \frac{1}{2}AD \\
 &= \frac{1}{3}AB + \frac{1}{3}AC - \frac{1}{6}AD = \frac{1}{3}(AB + AC - \frac{1}{2}AD); \\
 EM^2 &= \frac{1}{9}(AB^2 + AC^2 + \frac{1}{4}AD^2 + 2AB \cdot AC - AB \cdot AD - AC \cdot AD) \\
 &= \frac{1}{9}(a^2 + a^2 + \frac{a^2}{4} + a^2 - \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{2}) = \frac{a^2}{4}; EM = \frac{a}{2}.
 \end{aligned}$$

Ответ, $\frac{a}{2}$.

2. $\arccos \frac{\sqrt{33}}{11}$. Указание. Пусть MO — высота пирамиды.

Тогда целесообразно точку O принять за начало координат, ось Ox направить по лучу, сонаправленному с лучом OA , ось Oy направить по лучу, сонаправленному с лучами BC и AD , а ось Oz — по лучу OM .

Контрольные работы

K-1

Вар. 1. 1. 60°; 2. 1) 90°; 2) $\sqrt{\frac{2}{3}}$.

3. Пусть $A(0; y; 0)$ и пусть φ — искомый угол.

$$\sin \varphi = \cos(\vec{AB}, \vec{j}) = \vec{AB} \cdot \vec{j} = (1; -y; 1) \cdot \vec{j} = (0; 1; 0);$$

$$\sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{2 + y^2 + 1}} = \frac{1}{2}; \frac{y^2}{2 + y^2} = \frac{1}{4}.$$

Отсюда $y = \sqrt{\frac{2}{3}}$. Ответ, $\left| 0; \sqrt{\frac{2}{3}}; 0 \right|$ или $\left| 0; -\sqrt{\frac{2}{3}}; 0 \right|$.

4*. Пусть $a(6k; 8k; -7,5k)$.

$$\sqrt{36k^2 + 64k^2 + \frac{225}{4}k^2} = \frac{25}{2}k.$$

По условию $\frac{25}{2}k = 50$. Отсюда $k = 4$. Угол между вектором $\vec{a}$

и вектором $\vec{j}(0; 1; 0)$ тупой. Это значит, что $\vec{a} \cdot \vec{j} < 0$. Имеем $0 < 8k < 0 < 0$. Отсюда $k < 0$ и $k = -4$.

Ответ, $\vec{a}(24; -32; 30)$.

Вар. 2. 1. 1) 180°; $\arccos \frac{1}{\sqrt{10}}$; 2) $\sqrt{2}$.

2. Рассмотрим базисные векторы $\vec{CA}$, $\vec{CB}$ и $\vec{CC}_1$. Пусть $AC = CB = BB_1 = a$.

$$\begin{aligned} \vec{AB} \cdot \vec{CB} &= \vec{CA} \cdot \vec{CB}_1 = \vec{CB} \cdot \vec{CC}_1 = \cos \varphi \frac{|\vec{AB} \cdot \vec{CB}_1|}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{CB}_1|}; \\ |\vec{AB} \cdot \vec{CB}_1| &= (\vec{CB} - \vec{CA})(\vec{CB} + \vec{CC}_1) = a^2 - a'^2 = \frac{1}{2} \cdot 0 = 0 = \frac{3a'^2}{2}. \\ |\vec{AB}| &= a\sqrt{3}; |\vec{CB}_1| = a\sqrt{2}; \cos \varphi = \frac{3a'^2}{2a\sqrt{3} \cdot a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{4}. \end{aligned}$$

Ответ, $\arccos \frac{\sqrt{6}}{4}$.

3. Пусть $A(x; x; 0)$ и пусть φ — искомый угол.

$$\begin{aligned} \sin \varphi &= \cos(\vec{AB}, \vec{i}) = \vec{i} \cdot (1; 0; 0) = \vec{AB} \cdot (x-1; x-1; 1); \\ \sin \varphi &= \frac{x-1}{\sqrt{2(x-1)^2+1}} = \frac{1}{2} = \frac{(x-1)^2}{2(x-1)^2+1} = \frac{1}{4}; \\ 4(x-1)^2 &= 2(x-1)^2+1; 2(x-1)^2=1; x-1 = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}; \\ x-1 &= \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ или } x-1 = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

Ответ, $A(1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}; 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}; 0)$ или $A(1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}; 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}; 0)$.

4*. Пусть $OM(x; y; z)$. Из условия следует, что $7x=0$ и $3z=0$. Следовательно искомое множество есть пересечение плоскостей gOz и xOy , т. е. ось Oy . Ответ. Ось Oy .

Вар. 3. 1. $2\sqrt{5}$.

2. 1) $\arccos \frac{\sqrt{15}}{5}$; 2) $\frac{\sqrt{5}}{4}$; 3. $A(0; 0; 2\sqrt{6})$ или $A(0; 0; -2\sqrt{6})$.

4*. $b \begin{vmatrix} 8 & 10 & 13 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix}$. Задача решается аналогично задаче из

варианта 1.

Вар. 4. 1. 1) $\arccos \frac{2\sqrt{22}}{11}$; 2) $\sqrt{5}$; 2. $\arccos \frac{\sqrt{2}}{4}$.

3. $M(\sqrt{2}+1; 0; \sqrt{2}+1)$ или $M(1-\sqrt{2}; 0; 1-\sqrt{2})$. 4*. Ось Ox .

K-2

Вар. 1. 1. $4\pi(\sqrt{2}+4)$.

2. 1) $4\pi R^2 \sin^2 \varphi \cdot \cos \varphi$; 2) $\frac{R^2}{2}$. Указание. Так как угол

$\varphi = 30^\circ$, то наибольший угол между образующими тупой, а потому наибольшую площадь имеет сечение со взаимно перпендикулярными образующими. Площадь такого сечения равна $\frac{L^2}{2}$.

3*. Точки A, B и C имеют координаты $A(3; 3; 0)$, $B(0; \sqrt{3}; 0)$, $C(0; 0; 3)$. Из точки O опустим перпендикуляр OK на AB и точку K соединим с точкой C . $\angle CKO$ — искомый.

$$\tan \angle OKC = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}; \quad \tan \varphi = \frac{OC}{OK} = \frac{3 \cdot 2}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}.$$

Ответ. $\varphi = \arctg \sqrt{6}$.

Вар. 2. 1. $48\pi \times 2$; 2. 1) $18R^2 \times 3$; 2) $\pi R \times 3$.

3*. Уравнение сферы имеет вид $(x-1)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 32$. Центр сферы $O(1; 2; 0)$. Пусть T — точка касания. Тогда треугольник OTM прямоугольный ($\angle OTM = 90^\circ$), $OM = \sqrt{64 - 1 - 16} = 9$, $MT = \sqrt{81 - 32} = 7$.

Вар. 3. 1. $4\pi a^2 \times 3$; 2. 1) $\frac{4\pi^2}{3 \sin^2 2\alpha}$; 2) 30° .

3*. Находим координаты точек A и B : $A(0; -2; 0)$; точка B , принадлежащая сфере, имеет координаты $(1; 1; z)$. Исходя из уравнения сферы, имеем $0 = 1 + z^2 - 5$; $z = \pm 2$.

Так как $z > 0$, то $B(1; 1; 2)$.

$$AB = \sqrt{1 + 9 + 4} = \sqrt{14}.$$

Длина перпендикуляра, опущенного из точки B на плоскость xOz , равна 2. Если φ — искомый угол, то

$$\sin \varphi = \frac{2}{\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{14}}{7}, \quad \varphi = \arcsin \frac{\sqrt{14}}{7}.$$

Вар. 4. 1. $\frac{3\pi \times 5}{2}$; 2. 1) $6a^2$; 2) $\frac{3\pi a^2}{16}$.

3*. Данная плоскость пересекает плоскость xOy по прямой, проходящей через точку $K(1; 2; 0)$, и пересекает ось Ox в точке A , а ось Oy в точке B . Исходя из условия, треугольник AOB равнобедренный прямоугольный, причем $OA = OB = 6$. Высота этого треугольника OK равна $3\sqrt{2}$. Это и есть расстояние от центра шара до данной плоскости: $d = 3\sqrt{2} = R$. Тогда радиус линии пересечения

$$r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{25 - 18} = \sqrt{7}.$$

Отсюда длина искомой окружности равна $2\pi\sqrt{7}$.

K—3

Вар. 1. 1. 192 ; 2. $\frac{2\pi d^2 \lg a}{\cos^2 \alpha \cdot \lg \varphi}$.

3*. На рисунке 47, $\angle DEO = 60^\circ$ линейный угол двугранного угла, образованного плоскостью боковой грани и плоскостью основания. EO — биссектриса этого угла, O — центр вписанного

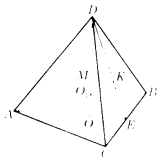


Рис. 47

шара, $O_1O = O_1K$ ($O_1K \perp DE$) — радиусы этого шара, MK — радиус окружности, по которой поверхность шара касается боковой поверхности пирамиды, $MO_1K \perp DEO$, 60° ; $MO_1 = \frac{1}{2}O_1K$ — расстояние от центра шара до плоскости сечения.

$$R_{\text{шара}} = OE = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{4\sqrt{3}}{3},$$

$$h_{\text{шара}} = R_{\text{шара}} - MO = \frac{4\sqrt{3}}{3} - \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3},$$

$$V_{\text{шара}} = \pi \cdot \frac{4\sqrt{3}}{9} \left[\frac{4\sqrt{3}}{3} - \frac{2\sqrt{3}}{9} \right] = \frac{4\pi\sqrt{3}}{27}.$$

$$\text{Var. 2. 1. } 1024, \quad 2. \frac{\pi R^3 \cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \varphi}{3}.$$

3*. Диагональ призмы является диаметром описанного около нее шара и равна $8\sqrt{5}$. Так как плоскость, перпендикулярная к диагоналим, делит ее в отношении 1 : 3, то высота меньшего сегмента, отсеченного этой плоскостью от шара, равна $2\sqrt{5}$. Радиус шара равен $4\sqrt{5}$.

$$V_{\text{шара}} = \pi \cdot 20 \left[\frac{4\sqrt{5}}{3} - \frac{2\sqrt{5}}{3} \right] = \frac{200\pi\sqrt{5}}{3},$$

$$\text{Var. 3. 1. } \frac{2048}{9}, \quad 2. \frac{2\pi m^3 \sqrt{\cos \varphi}}{\cos^3 \frac{\varphi}{2}}.$$

3*, $\frac{320\pi}{81}$. Указаний нет. Задача решается аналогично задаче 3* из варианта 1.

$$\text{Var. 4. 1. } \frac{16\sqrt{6}}{3}, \quad 2. \frac{\pi h^3 \operatorname{ctg}^3 \varphi}{3 \cos^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

3*. Центр описанного шара лежит на середине высоты призмы, проведенной через центр описанной вокруг основания окружности. В таком случае $R_{\text{шара}} = \sqrt{\left(\frac{H}{2}\right)^2 + R^2}$, где H — высота призмы, а R — радиус описанной вокруг основания окружности; $H = 2\sqrt{2}$, $R = \frac{4\sqrt{2}}{3}$, $R_{\text{шара}} = \sqrt{2 + \frac{32}{9}} = \frac{5\sqrt{2}}{3}$. Расстояние от центра шара до боковой грани равно радиусу вписанной в основание окружности, т. е. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. В таком случае $h_{\text{шара}} = \frac{5\sqrt{2}}{3} - \frac{2\sqrt{2}}{3} = \sqrt{2}$.

$$V_{\text{шара}} = 2\pi \left[\frac{5\sqrt{2}}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3} \right] = \frac{8\pi\sqrt{2}}{3}.$$

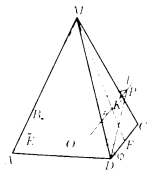


Рис. 48

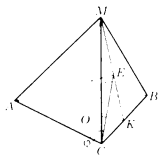


Рис. 49

К-4

Вар. 1. 1. 48, 2. $12\sqrt{7}$, 3. $\arccos \frac{3}{4}$, 4. 36, 5. $\frac{625\pi}{7}$.

6*. На рисунке 48 изображена правильная четырехугольная пирамида $MABCD$. Плоскость EMF (ME и MF — апофемы пирамиды) перпендикулярна к плоскости основания; $EK \perp MF$. Можно доказать, что $EK \perp DMC$. Через AB и EK проведена плоскость, которая пересекает плоскость DMC по прямой l , параллельной AB . В этой плоскости $BP \perp EK$. Тогда $BP \perp DMC$ и $\angle BDP = \varphi$ — угол между BD и плоскостью DMC . Следует учесть, что $BP \perp EK$, $MF \perp EK$, $MO \perp EF$, $EK \perp MF$, $MO \perp EF$. Отсюда

$$\sin \varphi = \frac{BP}{BD} = \frac{EK}{BD} = \frac{MO \cdot EF}{MF \cdot BD} = \frac{\sqrt{7} \cdot 6}{4 \cdot 2\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{7}}{8}.$$

$$\varphi = \arcsin \frac{\sqrt{14}}{8}.$$

Вар. 2. 1. $6\sqrt{39}$, 2. $12\sqrt{3}$, 3. $\arccos \frac{1}{5}$, 4. 12,

5. $\frac{32\pi}{81}$ ($\sqrt{13} - 2$).

6*. На рисунке 49 изображена правильная треугольная пирамида $MABC$; MK — апофема пирамиды. В плоскости AMK проводим $AE \perp MK$. Можно доказать, что $AE \perp BMC$, $MK \perp AC$, $AO = 4$, $MO = 3$.

$$AK \cdot MO = AE \cdot MK; \quad AE = \frac{AK \cdot MO}{MK} = \frac{6 \cdot 3}{\sqrt{13}} = \frac{18\sqrt{13}}{13}.$$

$\angle ACE = \varphi$ — угол между AC и плоскостью BMC .

$$\sin \varphi = \frac{AE}{AC} = \frac{18\sqrt{13}}{13 \cdot 4\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{39}}{26}; \quad \varphi = \arcsin \frac{3\sqrt{39}}{26}.$$

Вар. 3. 1. $32\sqrt{7}$, 2. $\frac{128\sqrt{3}}{3}$.

$$3. 2 \arctg \frac{\sqrt{6}}{6}; 4. 48; 5. \frac{2048\sqrt{3}}{27}.$$

6*. На рисунке 50 изображена правильная четырехугольная пирамида $MABCD$; $EK \perp DMC$. Плоскость, проходящая через AB и EK , пересекает плоскость DMC по прямой $l \perp AB$. В этой плоскости строим $AP \perp EK$. Тогда $AP \perp DMC$ и $\angle AMP = \phi$ — угол между AM и плоскостью DMC .

$$OC = 4, MO = 4\sqrt{3}, AC = 8, EF = CD = 4\sqrt{2}, EC = 2\sqrt{2},$$

$$ME = \sqrt{64 + 8} = 2\sqrt{14}; EK = MF = MO \cdot EF. \text{ Отсюда}$$

$$\frac{EK}{MF} = \frac{MO \cdot EF}{MF} = \frac{4\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{2}}{2\sqrt{14}} = \frac{8\sqrt{3}}{\sqrt{7}}; AP \perp EK;$$

$$\sin \phi = \frac{AP}{AM} = \frac{\sqrt{21}}{7}, \phi = \arcsin \frac{\sqrt{21}}{7}.$$

$$\text{Вар. 1. 1. } 6\sqrt{3}; 2. 3; 3. \arctg \frac{\sqrt{3}}{2}; 4. 3; 5. \frac{4}{3}.$$

6*. На рисунке 51 изображена правильная треугольная пирамида $MABC$; $BT \perp AMC$. Через середину BC , точку E , строим прямую, параллельную AC . Она пересекает BK в точке F . В плоскости KMB строим $FD \perp BT$. Тогда $FD \perp AMC$. Плоскость, проходящая через FE и FD , пересекает плоскость AMC по прямой $l \perp EF$. В этой плоскости строим $EP \perp FD$. Тогда $EP \perp AMC$, причём $EP \perp FD$, $\angle PME = \phi$ — угол между ME и плоскостью AMC .

$$MO = \sqrt{3}, BK = 3, ME = KM = 2, BT = KM = MO \cdot KB,$$

$$\frac{BT}{KM} = \frac{MO \cdot KB}{KM} = \frac{\sqrt{3} \cdot 3}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2}, PD = \frac{3\sqrt{3}}{4},$$

а так как $EP \perp FD$, то

$$\frac{EP}{ME} = \frac{3\sqrt{3}}{4}; \sin \phi = \frac{PE}{ME} = \frac{3\sqrt{3}}{8}, \phi = \arcsin \frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

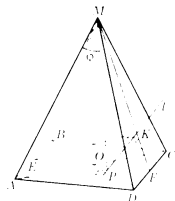


Рис. 50

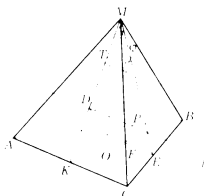


Рис. 51

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ РАБОТ ПО ПУНКТАМ И ГЛАВАМ УЧЕБНИКА

Раздел	Тема	Часы учебника
С 1	Принадлежность системы координат к пространству. Координаты вектора	16, 17
С 2	Свойства ду. координатных векторов и координатных точек. Проецирование на плоскость	18, 19
С 3	Множество векторов, заданных определением векторов	20, 21
С 4	Векторные уравнения прямой, плоскости и многогранника	22
С 5	Длина вектора	23, 24
С 6	Прямые и плоскости в пространстве и их взаимное расположение	25, 26
С 7	Нормаль. Метрические свойства сферического пространства	29, 30
С 8	Косинус угла между векторами	31, 33
С 9	Прямые и плоскости, заданные уравнениями. Координаты векторов и точек, принадлежащих прямой и плоскости	32, 33
С 10	Уравнение сферы. Метрические свойства сферы и ее поверхности	34, 36
С 11	Сфера	35, 38
С 12	Координаты сферы в декартовой геометрии и в сферической геометрии	39, 41
С 13	Объемы тел, образованных параллельными плоскостями	40
С 14	Объемы тел, образованных параллельными плоскостями	41, 42
С 15	Объемы тел, образованных параллельными плоскостями	42
С 16	Объемы тел, образованных параллельными плоскостями	43
С 17	Объемы тел, образованных параллельными плоскостями	44
С 18	Объемы тел, образованных параллельными плоскостями	45, 46
С 19	Объемы тел, образованных параллельными плоскостями. Плоскость сферы. Уравнение сферы	47, 48
С 20	Уравнение сферы. Плоскость сферы. Уравнение сферы	49
С 21	Уравнение сферы. Плоскость сферы. Уравнение сферы	50, 51, 52
С 22	Уравнение сферы. Плоскость сферы. Уравнение сферы	51, 52
С 23	Уравнение сферы. Плоскость сферы. Уравнение сферы	52, 53
С 24	Уравнение сферы. Плоскость сферы. Уравнение сферы	53, 54
С 25	Уравнение сферы. Плоскость сферы. Уравнение сферы	54, 55
С 26	Уравнение сферы. Плоскость сферы. Уравнение сферы	55, 56
С 27	Уравнение сферы. Плоскость сферы. Уравнение сферы	56, 57
С 28	Уравнение сферы. Плоскость сферы. Уравнение сферы	57, 58
С 29	Уравнение сферы. Плоскость сферы. Уравнение сферы	58, 59
С 30	Уравнение сферы. Плоскость сферы. Уравнение сферы	59, 60
С 31	Уравнение сферы. Плоскость сферы. Уравнение сферы	60, 61
С 32	Уравнение сферы. Плоскость сферы. Уравнение сферы	61, 62
С 33	Уравнение сферы. Плоскость сферы. Уравнение сферы	62, 63
С 34	Уравнение сферы. Плоскость сферы. Уравнение сферы	63, 64
С 35	Уравнение сферы. Плоскость сферы. Уравнение сферы	64, 65
С 36	Уравнение сферы. Плоскость сферы. Уравнение сферы	65, 66
С 37	Уравнение сферы. Плоскость сферы. Уравнение сферы	66, 67
С 38	Уравнение сферы. Плоскость сферы. Уравнение сферы	67, 68
С 39	Уравнение сферы. Плоскость сферы. Уравнение сферы	68, 69
С 40	Уравнение сферы. Плоскость сферы. Уравнение сферы	69, 70
С 41	Уравнение сферы. Плоскость сферы. Уравнение сферы	70, 71
С 42	Уравнение сферы. Плоскость сферы. Уравнение сферы	71, 72
С 43	Уравнение сферы. Плоскость сферы. Уравнение сферы	72, 73
С 44	Уравнение сферы. Плоскость сферы. Уравнение сферы	73, 74
С 45	Уравнение сферы. Плоскость сферы. Уравнение сферы	74, 75
С 46	Уравнение сферы. Плоскость сферы. Уравнение сферы	75, 76
С 47	Уравнение сферы. Плоскость сферы. Уравнение сферы	76, 77
С 48	Уравнение сферы. Плоскость сферы. Уравнение сферы	77, 78
С 49	Уравнение сферы. Плоскость сферы. Уравнение сферы	78, 79
С 50	Уравнение сферы. Плоскость сферы. Уравнение сферы	79, 80
С 51	Уравнение сферы. Плоскость сферы. Уравнение сферы	80, 81
С 52	Уравнение сферы. Плоскость сферы. Уравнение сферы	81, 82
С 53	Уравнение сферы. Плоскость сферы. Уравнение сферы	82, 83
С 54	Уравнение сферы. Плоскость сферы. Уравнение сферы	83, 84
С 55	Уравнение сферы. Плоскость сферы. Уравнение сферы	84, 85
С 56	Уравнение сферы. Плоскость сферы. Уравнение сферы	85, 86
С 57	Уравнение сферы. Плоскость сферы. Уравнение сферы	86, 87
С 58	Уравнение сферы. Плоскость сферы. Уравнение сферы	87, 88
С 59	Уравнение сферы. Плоскость сферы. Уравнение сферы	88, 89
С 60	Уравнение сферы. Плоскость сферы. Уравнение сферы	89, 90
С 61	Уравнение сферы. Плоскость сферы. Уравнение сферы	90, 91
С 62	Уравнение сферы. Плоскость сферы. Уравнение сферы	91, 92
С 63	Уравнение сферы. Плоскость сферы. Уравнение сферы	92, 93
С 64	Уравнение сферы. Плоскость сферы. Уравнение сферы	93, 94
С 65	Уравнение сферы. Плоскость сферы. Уравнение сферы	94, 95
С 66	Уравнение сферы. Плоскость сферы. Уравнение сферы	95, 96
С 67	Уравнение сферы. Плоскость сферы. Уравнение сферы	96, 97
С 68	Уравнение сферы. Плоскость сферы. Уравнение сферы	97, 98
С 69	Уравнение сферы. Плоскость сферы. Уравнение сферы	98, 99
С 70	Уравнение сферы. Плоскость сферы. Уравнение сферы	99, 100

